



**ESTADO
DE LA EDUCACIÓN**

Informe Estado de la Educación 2019

Investigación de base

Observación de prácticas
de aula y evaluación de los
aprendizajes de los
estudiantes

Investigadores:

Johanna Mena González
María del Rocío Mora Fallas
Berny Salas Solano
Alejandra Sánchez Ávil
Marianela Zumbado Castro
Dayanna Arce Quesada

San José | 2019



“Esta Investigación se realizó para el capítulo ESPECIAL, del SÉPTIMO INFORME ESTADO DE LA EDUCACIÓN.

Las cifras de esta investigación pueden no coincidir con las consignadas en el SÉPTIMO INFORME ESTADO DE LA EDUCACIÓN en el capítulo respectivo, debido a revisiones posteriores. En caso de encontrarse diferencia entre ambas fuentes, prevalecen las publicadas en el Informe.

Cuadro de contenido

Resumen Ejecutivo	4
Hechos relevantes	5
Introducción.....	8
Justificación	8
Problema	11
Hipótesis.....	12
Objetivo general.....	12
Objetivos específicos.....	12
Antecedentes	13
Desarrollo histórico de los programas de Matemáticas vigentes	13
Investigaciones en el periodo 2004-2010.....	14
Investigaciones en el periodo 2012-2015.....	15
Investigación en 2016	20
Marco teórico.....	22
Elementos curriculares del programa oficial.....	22
Tendencias pedagógicas y didácticas.....	22
Organización de las lecciones: etapas y momentos	22
Valoración de los niveles de complejidad y procesos matemáticos	24
Mediación pedagógica en Matemáticas.....	26
Criterios de calidad de la mediación pedagógica.....	26
Calidad de la mediación docente en el aula de Matemáticas	27
Dominio afectivo en la Educación Matemática	28
Pruebas estandarizadas en la asignatura de Matemáticas.....	30
Marco metodológico	33
Diseño de investigación	33
Muestra	34
Instrumentos.....	34
Protocolo para la observación de aula.....	34
Cuestionario docente.....	35
Prueba escrita	35
Cuestionario sociodemográfico.....	36
Tratamiento de los datos	37
Resultados.....	39
Docentes	40
Estudiantes.....	42
Mediación pedagógica	46
Desempeños esperados del docente	46

Idoneidad del perfil.....	60
Caso excepcional.....	62
Análisis cuantitativo de la prueba escrita.....	68
I Aplicación.....	68
II Aplicación.....	70
Datos comparativos entre la I y II aplicación.....	75
Análisis curricular de la prueba escrita.....	82
Información de colegios privados.....	87
Conclusiones y recomendaciones.....	111
Conclusiones.....	111
Sobre los estudiantes.....	111
Sobre los docentes.....	111
Sobre la mediación pedagógica.....	112
Sobre la idoneidad del perfil docente.....	113
Sobre la prueba escrita.....	114
Sobre la hipótesis.....	115
Recomendaciones.....	115
Para los docentes participantes en la investigación.....	115
Para las entidades formadoras.....	117
Para futuras investigaciones que involucren observación de aula en Matemáticas.....	117
Agenda de investigación.....	118
Limitaciones.....	118
Reflexiones finales: una mirada hacia el año 2024.....	119
Expectativas del perfil de salida del estudiante que concluye la enseñanza media.....	120
Expectativas del perfil docente para la enseñanza media según el MEP (2012) ...	121
Expectativas de la prueba estandarizada en Matemáticas.....	122
Referencias bibliográficas.....	123
Anexos.....	128
1. Proceso de pilotaje y homologación de jueces para el protocolo de observación de aula.....	128
2. Protocolo para la observación de aula.....	132
3. Instrumento para la Observación de prácticas de aula y evaluación de los aprendizajes de los estudiantes.....	148
4. Cuestionario docente.....	157
5. Prueba escrita.....	162
6. Cuestionario sociodemográfico.....	13
7. Descripción estadística del perfil docente.....	16
8. Cuestionario docente: método de calificación.....	22
9. Mediación pedagógica según grupo de docentes de colegios públicos.....	24
10. Distribución del tiempo por parte del docente de colegios públicos.....	26
11. Datos de los colegios según modalidad y número de estudiantes.....	27

12. Comportamiento de las calificaciones de la prueba escrita de la I a la II aplicación obtenida por estudiantes de colegios públicos según sexo.	28
13. Análisis curricular completo de la prueba escrita.....	29
14. Distribución de estudiantes por colegio, creencias hacia las Matemáticas y diferencia de la calificación de la I a la II aplicación de la prueba escrita	73

Resumen Ejecutivo

Este documento contiene los resultados de la investigación denominada “Observación de prácticas de aula y evaluación de los aprendizajes de los estudiantes”, en la cual participaron 30 secciones de décimo año de instituciones públicas y 5 de privadas, todas ubicadas en la GAM ampliada.

El objetivo general consistió en aproximar la calidad de la mediación pedagógica en Matemáticas, mediante la inmersión en las aulas de décimo año en centros educativos públicos, tomando en cuenta el rol del docente, las actividades del estudiante, los programas de estudio (MEP, 2012), determinando la incidencia de esos elementos en el rendimiento académico de los alumnos en el instrumento de evaluación aplicado.

El estudio se ubica en el paradigma cuantitativo, con un diseño descriptivo, en el cual los resultados obtenidos solo permiten caracterizar a los sujetos en el contexto específico analizado, por tanto, la generalización no está entre los alcances de la investigación.

Los hallazgos vinculados con los estudiantes se detallaron mediante tres grupos que surgieron de las creencias positivas, negativas y ambivalentes hacia la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. La información relacionada con los docentes y la mediación pedagógica se interpretó a partir de la calificación obtenida en el perfil de idoneidad, el conocimiento que poseían de los fundamentos de los programas oficiales, generando dos grupos denominados “Conocimiento aceptable” y “Conocimiento por mejorar”.

La prueba escrita fue sometida a dos tipos de análisis: cuantitativo y curricular. El primero consistió en determinar la diferencia entre las calificaciones de los estudiantes en los dos momentos de aplicación, de forma general y por áreas matemáticas, el segundo se realizó mediante la *Estrategia “4+6”* (Ruiz, 2017), con el fin de establecer un parámetro de concordancia con la fundamentación teórica de los programas de Matemáticas vigentes.

Se destacan los siguientes resultados: el grupo de estudiantes es heterogéneo y se inclina hacia las creencias negativas sobre la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas, no hay diferencia significativa entre la mediación pedagógica ejecutada por los docentes con conocimiento aceptable y los que deben mejorar su conocimiento de los programas. Además, la resolución de problemas como estrategia metodológica, el uso didáctico de las tecnologías digitales y la presencia de procesos matemáticos, se evidenciaron en un porcentaje mínimo en la totalidad de las lecciones observadas. La mayoría de docentes observados no alcanzan un 70 en la calificación del perfil idóneo, lo que tiene estrecha relación con las escasas evidencias recolectadas sobre la calidad de la mediación pedagógica. Finalmente, la prueba escrita utilizada en esta investigación no fue

coherente con la propuesta del MEP (2012), tanto los estudiantes de colegios públicos como privados obtuvieron una calificación media cercana al 4 en la I aplicación y en la II al 4,6 en una escala de 1 a 10, por tanto, el incremento después de siete meses de clases fue muy bajo.

Descriptores

Educación secundaria, Matemáticas, método de enseñanza, calidad, prueba escrita, planes de estudio.

Hechos relevantes

Características de los estudiantes

Los estudiantes de colegios públicos son un grupo muy heterogéneo que se inclina hacia las creencias negativas en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas.

Los estudiantes de colegios privados no presentan un patrón definido, solo se evidencia la presencia de los tres tipos de creencias: negativas, ambivalentes y positivas.

Características de los docentes

Los docentes de colegios públicos se ubican en dos grupos, el primero de ellos posee un conocimiento aceptable sobre los programas de estudio de Matemáticas (MEP, 2012) y el segundo conocimientos por mejorar, solo 2 de 30 alcanzaron la nota máxima en el instrumento de calificación correspondiente.

Un grupo de profesionales que laboran en colegios públicos no han recibido ninguna capacitación sobre los programas en los últimos cinco años.

Aun cuando los docentes de centros privados no han participado en procesos de capacitación del MEP sobre los programas oficiales, estos evidencian algún nivel de conocimiento.

Mediación pedagógica

Los docentes de colegios privados en comparación con los públicos obtuvieron las calificaciones más bajas en la sección de *desempeños esperados*.

Se encontró que 19 de 30 docentes de colegios públicos no logran calificación de 70 y solo 1 supera el 90, en el perfil de idoneidad construido por el equipo investigador, lo que demuestra la distancia que existe entre éste y las características de los docentes observados.

El tiempo que invierten los docentes de colegios públicos en las actividades de gestión es mayor que en los colegios privados, pero se justifica por la diferencia en la cantidad de estudiantes a cargo y el papeleo correspondiente.

Respecto a las actividades que se desarrollan en la clase, los docentes de colegios privados emplean más tiempo en la clase magistral que los públicos, por lo que avanzan más rápido en el desarrollo de los conocimientos matemáticos, propician más el “Trabajo personal” pero limitan los periodos en el aula para que los estudiantes realicen “Resolución de ejercicios”.

La distribución de tiempo de los estudiantes entre las actividades relacionadas y no relacionadas con el aprendizaje, mantuvo un comportamiento similar en los colegios públicos y privados, alcanzan como mínimo 83% para las primeras y en las segundas no superan el 12%.

A pesar de la gama de materiales didácticos (incluidas las tecnologías digitales) que pueden usar los docentes en el aula, tanto en públicos como en privados, predominan las de tipo tradicional. Sin embargo, solo en los privados se evidencia el uso de la calculadora, por parte de los estudiantes, asociado con el desarrollo de una clase magistral donde únicamente se comprueban resultados.

En colegios públicos y privados, se evidencia que en los grupos en general, se destinó escaso tiempo para propiciar procesos matemáticos y Conectar obtuvo el menor porcentaje. Según Ruiz (2017) la forma más pertinente de activarlos es a través de la “Resolución de problemas”, esta estrategia se empleó en el menor de los casos por lo que la información es coherente con la poca presencia de los procesos. Sin embargo, los casos particulares (E1 y E2) demuestran que los estudiantes son capaces de evidenciar algunos indicadores de los procesos, a pesar de que el docente no emplea la “Resolución de problemas”.

Análisis cuantitativo de la prueba

Durante la primera aplicación de la prueba la nota promedio de los estudiantes no alcanzó 4 y en la segunda un 4,6 en una escala de 1 a 10 y no se presentaron diferencias significativas entre las áreas matemáticas evaluadas.

Los estudiantes de la provincia de Cartago son los que obtienen la calificación promedio mayor en el total de la prueba durante la I aplicación, en ambos tipos de colegio.

El área matemática que presentó menor calificación promedio en la I y II aplicación de la prueba fue Estadística y Probabilidad, tanto en colegios públicos como en privados.

El área matemática Relaciones y Álgebra fue la que más aumento presentó en la calificación promedio de la II aplicación de la prueba, en ambos tipos de colegio.

Los estudiantes no lograron resolver como mínimo los ítems correspondientes al nivel de complejidad denominado Reproducción, considerado el más bajo de los tres que se incluyen en los programas de Matemáticas del MEP (2012).

Análisis curricular de la prueba

La prueba escrita utilizada en esta investigación no tuvo coherencia con el enfoque curricular propuesto por el MEP (2012) para cada área, le faltó correspondencia entre habilidades generales y específicas, el uso de la contextualización activa fue deficiente y la mayoría de los ítems se clasifican en el nivel de complejidad denominado Reproducción.

Introducción

Justificación

En el 2012, se implementa en Costa Rica la reforma curricular para la asignatura de Matemáticas desde la enseñanza primaria hasta la secundaria, uno de los factores que le dio origen fue su histórico bajo rendimiento escolar, en parte asociado a la actitud de rechazo, temor y en general negatividad hacia ésta, generando culturalmente condiciones afectivas desfavorables para el aprendizaje (Ruiz, 2013).

Las pruebas PISA 2009 Plus, pretendían medir la competencia de los estudiantes del sistema escolar con edades de 15 años, en las áreas de: Lectura, Ciencias y Matemáticas, el dato más alarmante es sobre la última, donde “un 23,6% de los jóvenes costarricenses no alcanza ni siquiera el nivel mínimo” (Ruiz, 2013, p. 13).

Se destaca que el nivel más bajo de la taxonomía, implica resolver situaciones en las que se les dan indicaciones directas, todos los datos se ofrecen de forma explícita e involucran procesos rutinarios en contextos familiares. Esto supone que, en la mayoría de los estudiantes que aplicaron la prueba, no se evidencia comprensión de aspectos conceptuales y rutinarios elementales, lo que parece sugerir que los procesos de mediación no logran ni los niveles mínimos de competencias matemáticas (OCDE, 2011)

Otra prueba que brinda datos relevantes es denominada DiMa y la aplica la Universidad de Costa Rica (UCR) desde el 2004 hasta la actualidad, a los estudiantes que desean cursar carreras que incluyen Matemáticas en su plan de estudio y que previamente, aprobaron la prueba de Bachillerato y la de admisión a dicha institución, se incluyen ítems similares a los utilizados por el MEP, pero en este caso, no se permite el uso de la calculadora. Aproximadamente un 42% de los estudiantes que han aplicado el examen en los últimos 10 años han obtenido calificaciones entre 20 y 39, mientras que solamente un 15% obtuvo más de un 70, considerada nota mínima de aprobación (Ruiz, 2013).

En la propuesta curricular del MEP para el 2012, según Ruiz (2013, p.21) se plantearon propósitos para la preparación escolar en Matemáticas:

- Una formación matemática escolar para nutrir la acción vital del ciudadano, es decir, para favorecer la intervención en su vida (formando en la criticidad y en la utilidad de las Matemáticas).
- Potenciar una cultura matemática con rostro humano, con una perspectiva humanista del conocimiento y la educación.
- Construir una Educación Matemática eficaz que promueva una interrelación armoniosa de docentes, estudiantes y apropiadas condiciones de aula.

- Ampliar las capacidades cognitivas de los estudiantes con base en las Matemáticas.
- Ampliar las actitudes y las creencias positivas sobre las Matemáticas.
- Lograr aprendizajes significativos y competencias matemáticas instrumentales para la educación superior y formación de profesionales.
- Un diseño curricular con fundamentos sólidos, coherentes con la malla curricular de todos los ciclos (los fundamentos debían ser “operacionalizados”).

Estos propósitos corresponden con la política curricular “Educar para una nueva ciudadanía” (CSE, 2016), que abarca todas las reformas curriculares realizadas en el periodo (2006-2014) mientras Leonardo Garnier Rímolo fungía como Ministro de Educación Pública en Costa Rica.

Además, según MEP (2015), la política asume tres pilares fundamentales para la sociedad: ciudadanía para el desarrollo sostenible, ciudadanía planetaria con identidad nacional y ciudadanía virtual con equidad social, a través de habilidades categorizadas en las siguientes dimensiones:

- Formas de pensar: busca promover habilidades como pensamiento sistémico, pensamiento crítico, aprender a aprender, resolución de problemas y creatividad e innovación (pp. 30-31).
- Formas de vivir en el mundo: pretende fortalecer habilidades para una ciudadanía local y global, responsabilidad personal y social, estilos de vida saludables, y formación para la vida y para la elección de carrera (pp. 32-33).
- Formas de relacionarse con otros: busca fomentar las habilidades de colaboración, y comunicación (p. 34).
- Herramientas para integrarse al mundo: fomenta las habilidades de apropiación de tecnologías digitales y manejo de la información (p. 35).

Ruiz (2018) elabora un análisis de la coherencia entre dicha política y los programas de estudios de Matemáticas (MEP, 2012), a lo que concluye que, en los ambientes propuestos en estos últimos, “concebidos como espacios de mini-comunidades científicas”, a partir de la estrategia metodológica Resolución de problemas y los cinco ejes disciplinares, es posible:

(...) desarrollar capacidades cognitivas, socio afectivas y el cultivo de actitudes y valores. Las capacidades que se privilegian son sin duda las cognitivas, pero desde el marco curricular de esta asignatura se ofrecen vías para apuntalar las otras que se señalan en la nueva política curricular (p.183).

Lo anterior, es coherente con el efecto sinérgico que el MEP (2012) indica se produce con los ejes disciplinares, los cuales buscan “favorecer una formación matemática de calidad

que ayude a generar personas competentes, racionales, responsables y críticas para la construcción de una sociedad culta, justa y democrática” (p. 36).

Es importante, señalar que la política curricular de acuerdo con el MEP (2015, p. 25), conlleva a cuatro retos principales:

- La formación continua de las personas que integran cada comunidad educativa.
- La mediación pedagógica propicia para construir conocimientos.
- El fomento de ambientes de aprendizaje diversos y enriquecedores.
- La evaluación formativa y transformadora.

Ruiz (2013) había identificado retos a partir de la implementación de la malla curricular para Matemáticas en 2012, relacionadas con: el trabajo de aula, la formación inicial y continua de los docentes, la aplicación de una estrategia metodológica específica y la evaluación de los aprendizajes. Al respecto, se nota como ambas reformas presentan metas similares.

Establecer la relación entre la mediación pedagógica y la evaluación de los aprendizajes, cobra importancia al estar reflejada en la Política Educativa aprobada en el 2016, denominada *La persona: centro del proceso educativo y sujeto transformador de la sociedad*, esto porque se indica que la educación debe estar centrada en la persona estudiante y su proceso de aprendizaje, desde la siguiente perspectiva:

Los procesos educativos de calidad privilegiarán la centralidad del aprendizaje de la persona estudiante con el fin de asegurar competencias que propicien la comprensión, expresión e interpretación de conceptos, pensamientos, sentimientos, hechos y opiniones, para permitirle a la persona estudiante interactuar en forma provechosa en todos los contextos posibles (MEP, 2016, pp.12-13).

Por lo anterior, es prioridad ofrecer un proceso educativo de calidad el cual puede ser valorado a través de la adquisición de algunas competencias y una de ellas será la competencia matemática (MEP, 2012) la cual coincide con las ideas establecidas en la Política Educativa, porque pretende propiciar “una capacidad del individuo para formular, emplear e interpretar las Matemáticas en una variedad de contextos”, así como “hacer juicios bien fundados y decisiones necesarias para ciudadanos constructivos, comprometidos y reflexivos” (MEP, 2016, p.23).

La Política Educativa también indica la importancia de los procesos evaluativos proponiendo “una institucionalización de un programa nacional de uso de resultados basados en evidencias que permita la toma de decisiones para la mejora continua del

sistema educativo” (MEP, 2016, p.19), por tanto, una investigación de esta índole es coherente con las ideas ministeriales sobre la relevancia de establecer procesos rigurosos de recolección de información, análisis e interpretación para tomar decisiones.

Asimismo, se coincide con la Política Educativa en la necesidad de incluir en los procesos de valoración “la autoevaluación, la construcción integrada a los aprendizajes y el desarrollo de habilidades y competencias” (MEP, 2016, p.19) y para el área específica de Matemática, este último será a través de los procesos matemáticos (Ruiz, 2017).

En el Sexto Informe del Estado de la Educación (2017), se señalaba que para Costa Rica ya no es prioridad profesionalizar el sector educación, además que el MEP, como mayor empleador, no posee mecanismos que permitan identificar las capacidades docentes que garanticen una mediación pedagógica de calidad y un dominio del contenido, se señala respecto a los docentes de Matemáticas que “se observó –al referirse a las lecciones– el predominio de métodos tradicionales centrados en el profesor y un bajo uso de tecnologías” (PEN, 2017, p. 33) lo que demostró incoherencia con la reforma curricular del MEP (2012).

Por las situaciones descritas, es válido profundizar sobre lo que se está o no haciendo en las aulas de Matemáticas y su relación con el desempeño de los estudiantes en las pruebas escritas, a partir de elementos puntuales citados por Zúñiga, Brenes, Núñez, Barrantes, Zamora, Sánchez y Castillo (2016), y de acuerdo con los recursos disponibles, fundamentación teórica y posibilidad de recolectar información, que priorizan los siguientes aspectos: el tiempo efectivo de aprendizaje, el perfil profesional del docente de Matemáticas del MEP y las estrategias didácticas utilizadas en relación con el involucramiento de los estudiantes en las lecciones.

De esta manera surgen el problema, la hipótesis, el objetivo general y específicos que orientan la presente investigación.

Problema

¿Inciden las características de los estudiantes, el perfil docente, el manejo del tiempo en actividades de aprendizaje, no aprendizaje y gestión, el uso de los materiales didácticos y los procesos matemáticos, en la calidad de la mediación pedagógica y en el incremento, mantenimiento o disminución del rendimiento de los estudiantes en el instrumento de la prueba escrita?

Hipótesis

La calidad de la mediación pedagógica que propicia el docente, caracterizada por el manejo del tiempo en las actividades de aprendizaje, no aprendizaje y gestión, el uso de los materiales didácticos, los procesos matemáticos, así como su desempeño en el aula y conocimiento de los programas oficiales, incide en el rendimiento de los estudiantes en la prueba escrita aplicada.

Objetivo general

Aproximar la calidad de la mediación pedagógica en Matemáticas, mediante la inmersión en las aulas de décimo año en centros educativos públicos y privados, tomando en cuenta el docente, el estudiante, los programas de estudio (MEP, 2012) y la prueba escrita, determinando la incidencia de esos elementos en el rendimiento de los alumnos en el instrumento de evaluación aplicado.

Objetivos específicos

- Caracterizar al estudiante desde su condición sociodemográfica, económica, académica y creencias hacia las Matemáticas.
- Caracterizar al docente desde su formación académica, capacitación recibida y nivel de conocimiento sobre el contenido, la pedagogía y el currículo.
- Examinar la mediación pedagógica tomando en cuenta actividades del estudiante y del docente, materiales didácticos utilizados, distribución del tiempo y procesos matemáticos propiciados.
- Construir criterios de calidad de la mediación pedagógica en Matemáticas considerando la interacción entre docente, estudiantes y currículo.
- Medir el rendimiento académico de los estudiantes al inicio y final del curso lectivo 2018.
- Analizar la prueba utilizada para aproximar rendimiento mediante dos perspectivas: cuantitativa y curricular.
- Orientar la ruta que permita obtener resultados satisfactorios en Matemáticas con la implementación de la propuesta curricular del MEP (2012).
-

Para lograr estos objetivos el equipo investigador tuvo bajo su responsabilidad todo el proceso relacionado con la observación de aula, en el cual se realizaron dos inmersiones por institución educativa y una encuesta al docente; el equipo técnico del Estado de la

Educación estuvo a cargo de la aplicación de la prueba escrita en dos oportunidades distintas en el curso lectivo, con lo que se pretendió evaluar las habilidades de los estudiantes de acuerdo con los programas de Matemáticas, además distribuyó un cuestionario para caracterizar los estudiantes participantes.

Antecedentes

Desarrollo histórico de los programas de Matemáticas vigentes

Antes del 2012

El aprendizaje y enseñanza de las Matemáticas en Costa Rica, no es la misma a partir del 2012, debido a que en este año se aprueban los programas vigentes y estos comienzan a impulsar cambios a nivel de la organización de la malla curricular y la metodología, razón que conlleva la creación, aprobación y ejecución de planes de transición durante el 2013, 2014, 2015 y 2016, para lograr ya en 2016 ejecutar una prueba de bachillerato académico con la propuesta curricular del ciclo diversificado y en 2017 el bachillerato técnico con las mismas condiciones.

Pero ¿qué había antes del 2012? Se debe indicar que se trabajaba con unos programas que no sufrían modificaciones sustanciales desde 1995. En 2001 y 2005, últimas veces que se realizó algún ajuste, consistió en la reubicación de contenidos matemáticos, pero no incluía una transformación conceptual sobre la enseñanza y aprendizaje de esta disciplina, obviando las tendencias mundiales en Educación Matemática que venían desde algunos años atrás estableciendo nuevos paradigmas.

De acuerdo con Barrantes y Ruiz (2014), los programas empleados antes del 2012, carecían de congruencia entre sus lineamientos y la malla curricular, debido a que se exponía una perspectiva constructivista, mientras que las acciones de planeamiento y mediación poseían un enfoque conductista. Además, no existía ninguna articulación entre los temas matemáticos a nivel interno de cada área o con otras de interés.

Asimismo, los autores establecen una falta de correspondencia entre el entorno y los contenidos estudiados, una insuficiente cantidad de indicaciones sobre la metodología y el uso adecuado de la tecnología. Es importante señalar que no había una conexión entre los fundamentos teóricos de los programas de primaria y se carecía de una visión estratégica integral que visualizara el desarrollo de los contenidos matemáticos para favorecer sus conexiones a través de los diferentes ciclos de la educación pública.

La resolución de problemas se asume como un contenido por aprender y no como estrategia metodológica, además, los contenidos matemáticos de Álgebra, Estadística y Probabilidad, poseían serios problemas en su articulación y manejo. También, se indica la

total ausencia de la Geometría de coordenadas (Barrantes y Ruiz, 2014) y este es un elemento novedoso que se incluyó en los programas del MEP (2012).

A partir del 2012

Se dan cambios categóricos, los programas oficiales establecen como estrategia metodológica principal a la resolución de problemas, donde esta estrategia se asume como el medio para aprender matemáticas, con una sólida construcción teórica-conceptual que orienta la malla curricular desde el primer grado hasta el undécimo año, no solo respecto a sus lineamientos de mediación sino en la articulación de los conocimientos matemáticos de las áreas de interés como lo son Números, Medidas, Relaciones y Álgebra, Geometría, Estadística y Probabilidad, desde una perspectiva de la Matemática realista (contextualización activa) a través de todos los años escolares.

Es importante señalar que los programas oficiales, están diseñados por habilidades específicas que son las que establecen qué y cómo abordar los conocimientos matemáticos. Se incluye una columna denominada indicaciones puntuales, que consiste en explicaciones de orden didáctico para cada grupo de habilidades específicas, según año escolar y área matemática. También, contiene indicaciones sobre el uso de la tecnología, la historia de las Matemáticas, procesos matemáticos, entre otros. Al final de cada área por ciclo escolar es posible encontrar indicaciones metodológicas y de evaluación.

Es importante señalar que la estrategia metodológica de resolución de problemas de acuerdo con el MEP (2012) es explícita y puntual, pero no implica que los momentos y etapas se presenten de manera secuencial, esto se ampliará más adelante. Seguidamente, un recorrido histórico de investigaciones que se vinculan con la temática objeto de este estudio.

Investigaciones en el periodo 2004-2010

En 2004 y 2007, investigadores como Alfaro, Alpízar, Arroyo, Gamboa, Hidalgo y Chaves, señalaron la problemática que los docentes de Matemáticas presentaban para desarrollar algunos contenidos propios de la disciplina incluidos en la propuesta curricular ministerial del 2005 (MEP 2005a; MEP 2005b), situación coherente con las constantes críticas emanadas por las universidades, acerca de la formación básica con la que el estudiantado estaba ingresando a esas instituciones.

Por estas razones, en el 2010, Chaves, Castillo, Chaves, Fonseca y Loría se propusieron analizar la concordancia entre la realidad de aula, los programas del MEP y la formación de docentes de Matemáticas. Esto a través de un estudio que involucraba la malla curricular correspondiente a la enseñanza media, participaron 249 docentes que

laboraban en colegios académicos diurnos públicos de 15 regiones educativas y estudiantes de 19 secciones de distintos niveles (sétimo, octavo, noveno y undécimo).

Utilizaron diferentes técnicas de recolección de datos como: análisis documental, cuestionarios, observación no participante, entrevista semi-estructurada y grupos focales.

Entre las conclusiones citadas por Chaves et al (2010), relacionadas con la presente investigación, se encuentran:

- La formación que reciben los docentes en las instituciones de educación superior, que existen debilidades en el dominio de los fundamentos teóricos y prácticos de los programas MEP (2005).
- La realidad de aula evidencia un divorcio entre lo que se vive en los grupos observados y lo propuesto en los programas, esto lo afirman mediante la siguiente expresión “el planeamiento didáctico, la mediación pedagógica y la evaluación de los aprendizajes, apunta en una dirección inversa a estos postulados teóricos” (p. 40).

Investigaciones en el periodo 2012-2015

En el 2014, Lentini y Villalobos, investigaron sobre las condiciones en las cuales se estaba implementado la reforma de la Educación Matemática en Costa Rica en centros educativos públicos de secundaria, a través de un estudio que involucraba a los docentes que estaban en las aulas de séptimo, octavo y noveno año a nivel nacional. La información se recolectó a través de una entrevista auto-administrada a 287 docentes seleccionados aleatoriamente.

Entre los hallazgos mencionados por Lentini y Villalobos (2014), se consideran más significativos para la presente investigación los siguientes:

- El uso de canales de comunicación adecuados a través de las instancias del MEP, el uso de recursos virtuales y la actualización activa (capacitaciones y seguimiento), son elementos que potencian la ejecución de la propuesta curricular (p. 7).
- Un 72% de los docentes declara conocer mucho sobre la reforma de matemáticas, aumentando significativamente este porcentaje (80%) entre quienes más la están ejecutando (p. 7).
- El 57% de los docentes declaró haber recibido capacitación bimodal, es decir, presencial y virtual, en proporción significativamente mayor en la zona rural (62%). Un 36% mencionó haber recibido la capacitación presencial pero no virtual, para un total de 87% de docentes capacitados en la propuesta curricular (p. 9).

- Los docentes no son homogéneos en las actitudes categorizadas en ocho dimensiones: a) Habilidades y condiciones percibidas, b) Motivación laboral y cargas de trabajo, c) Responsabilidad e iniciativa, d) Jefatura y condiciones, e) Cooperación y procesos, f) Aprendizaje, g) Ambiente de renovación y h) Metas (p.16)

Dentro de las conclusiones se destaca con relación al presente estudio la siguiente:

Es importante para las autoridades del Ministerio de Educación contar con información y monitorear el progreso de la implementación de la reforma curricular a través del tiempo, para establecer mecanismos de resolución de adversidades durante el proceso, hacer los cambios necesarios, y potenciar las buenas prácticas que aseguren el logro satisfactorio de la incorporación de la misma en todos los centros educativos (Lentini y Villalobos, 2014, p. 22).

Asimismo, el Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica (PREMCR) en coordinación con el MEP, ha realizado en distintos periodos otro tipo de estudios denominados planes piloto. Tomando en consideración la población meta de la presente investigación sólo se hará referencia a los resultados que conciernen al III ciclo de la Educación General Básica. A continuación, se describe cada uno.

Pilotaje 2012

Según Espinoza y Zumbado (2015, p.134), este pilotaje se llevó a cabo con el fin de identificar las virtudes y debilidades de la implementación curricular, para ofrecer recomendaciones a las autoridades ministeriales, asesores pedagógicos y docentes, pero principalmente para medir el pulso de la reforma educativa.

El estudio fue de tipo cualitativo, se recolectó la información a partir de cuestionarios, entrevistas y observación no participante (realizada por los miembros del PREMCR) con el propósito de indagar lo ocurrido en las aulas, la percepción docente y de los asesores pedagógicos.

Cabe mencionar que los docentes participantes a nivel de secundaria fueron 36, seleccionados por los asesores pedagógicos, según su labor de supervisión, además tenían que haber cursado la capacitación sobre los programas que se impartió en el 2011 y contar con el aval de los directores de los centros educativos correspondientes.

Una de las innovaciones que presentó este proceso fue la administración de los cuestionarios a los docentes en tres momentos distintos: antes, durante y al final del pilotaje, esto permitió:

- Recolectar información sobre la percepción inicial y expectativas sobre el pilotaje.
- Valorar el proceso intermedio.
- Determinar la impresión general del pilotaje.
- Recolectar las experiencias y sugerencias de los participantes (p.137).

Entre los hallazgos más importantes relacionados con la presente investigación se destacan:

- Los docentes participantes se sintieron satisfechos, ya que, lo consideraron como un proceso de preparación para implementar los programas, además de no identificar dificultades en la estrategia metodológica propuesta.
- Se obtuvo una valoración muy aceptable de los elementos principales de la malla curricular (conocimientos, habilidades específicas, indicaciones puntuales y metodológicas).
- La actitud de los estudiantes hacia la reforma curricular fue satisfactoria, ya que demostraron mayor interés hacia las Matemáticas.
- Se consideró relevante la función del asesor pedagógico en el acompañamiento de los docentes.
- A los docentes de secundaria se les dificultó cómo evaluar los aprendizajes y elaborar el planeamiento didáctico.
- Se recomendaron sesiones de información sobre los programas dirigidas a padres de familia.

Pilotaje 2013 e informe técnico de implementación

Durante el plan de transición de este año, el pilotaje consistió en monitorear y evaluar esa primera puesta en práctica, a través de un estudio mixto que permitiera responder varias interrogantes, de las cuales algunas se relacionan estrechamente con la presente investigación:

- ¿Cuánto conocen los docentes de los nuevos programas? ¿Cuánto conocen el plan de transición? ¿Cuánto se aplicaron estos en las aulas durante el 2013?
- ¿Cuál ha sido la actitud de los estudiantes hacia la nueva metodología (hasta dónde se ha podido implementar en un año)?
- ¿Cuáles han sido las principales dificultades para la implementación de los programas?
- ¿Cuáles son los principales desafíos y las acciones para avanzar en la implementación curricular? (PREMCR, 2015, p. 230).

La información se recolectó a partir de diversas fuentes entre ellas: datos de los planes piloto (primaria y secundaria), observación no participante de docentes durante la ejecución de clases y cuestionarios antes y después de las actividades de monitoreo.

Los participantes se distribuyeron de la siguiente forma:

- Plan piloto: 16 profesores de enseñanza media que impartían clases a nivel de sétimo año.
- Cuestionario a docentes líderes: 58 personas que participaron en el curso bimodal de capacitación para docente de secundaria: Uso de tecnología y uso de historia de las Matemáticas.
- Cuestionario a asesores pedagógicos: 14 funcionarios.
- Cuestionario a docentes de cursos bimodales masivos: 78 personas.

Las observaciones de aula consistían en determinar el desempeño del docente en las dos etapas, que se indican para la organización de las lecciones según los programas de estudio: I etapa el aprendizaje del conocimiento y II etapa la movilización y aplicación de los conocimientos. En todos los casos, los asesores pedagógicos de Matemáticas fungieron como observadores de los docentes, por lo que, se garantizaba que tenían conocimiento de la disciplina (PREMCR, 2015).

Entre las conclusiones más relevantes indicadas por el PREMCR (2015) y según lo expuesto anteriormente están:

- Los docentes del plan piloto y los grupos líderes conocen en su gran mayoría los programas y el plan de transición (p. 241).
- La población monitoreada usó durante el proceso la metodología principal de los programas hasta donde era posible (p. 241).
- Los docentes manifiestan que los estudiantes tienen una buena actitud, en particular en los siguientes aspectos: hay mayor participación, se desarrolla el pensamiento crítico y se logra mantener la atención y el interés (p. 243).

Entre las limitaciones para la implementación de los programas se mencionan:

- Las características de la población estudiantil, específicamente las culturales y familiares, que son difíciles de modificar por el sistema educativo y que provocan deficiencias en la dinámica de aula propuesta en los programas.
- Algunos docentes no habían logrado interiorizar el currículo.
- La micro y macroevaluación, ya que, se considera que, si no se incluyen ítems de desarrollo usando resolución de problemas, el cambio curricular no será tan evidente.

- En Costa Rica, cualquier editorial elabora libros de texto para secundaria, sin requerir el aval por parte del MEP, esto no garantiza que la orientación sea la misma que se incluye en los programas oficiales.
- Los docentes manifiestan dificultades en el cierre de la I etapa, además con el desarrollo de contenidos nuevos que no estaban en los programas anteriores.
- A pesar de poseer títulos a nivel universitario, esto no garantiza el dominio en la implementación de los programas.
- La duración y las fechas (momento del periodo lectivo) en que se realizó el estudio representan limitaciones para ampliar los resultados, que al final del curso lectivo hubiera sido más revelador.

Se resalta el hecho de que antes del proceso de monitoreo los docentes no habían logrado hacer un planeamiento coherente con la organización de la lección e indicaciones puntuales que se incluyen en los programas y que después de dicho proceso lo consiguieron, por lo que, los autores afirman que la modificación curricular se puede llevar a la práctica.

Como parte de los desafíos los autores plantean que se debe seguir apoyando esta reforma, avanzar hacia la implementación, dar seguimiento a todos sus actores y fortalecer procesos de capacitación. Estrechar el vínculo entre MEP y universidades formadoras para que los egresados tengan mayor dominio de los programas oficiales.

Pilotaje 2015

En el 2015, se plantea un nuevo pilotaje con cuatro objetivos específicos, de los cuales solo se mencionan dos por la relación que tienen con la presente investigación:

- Determinar buenas prácticas en la implementación curricular en el área de Relaciones y Álgebra y Estadística y Probabilidad mediante la integración de habilidades del currículo nacional de Matemáticas para noveno año.
- Monitorear y evaluar la puesta en práctica de los programas de estudio de Matemáticas en las áreas Estadística y Probabilidad y Relaciones y Álgebra, en el nivel de noveno año, mediante el uso de la integración de habilidades (PREMCR, p.12).

El estudio fue cualitativo, la recolección de la información se realizó a través de cuestionarios, observación no participante y estudio de casos. Participaron 15 docentes de noveno año, sin embargo, solo 5 fueron seleccionados para ser estudiados con detalle, debido a que poseía la información completa durante las observaciones realizadas por el asesor pedagógico en tres fechas distintas.

Entre los hallazgos más relevantes relacionados con el presente estudio, el PREMCR (2015) indica que:

- El planeamiento estuvo bien enfocado en cuanto a la integración de habilidades en un alto número de los casos (p. 41).
- Se observó dominio de los fundamentos de los programas oficiales, especialmente la puesta en práctica de los cuatro momentos propuestos para organizar las lecciones.
- Se presentó una buena selección del problema, la cual es esencial para ejecutar una buena práctica pedagógica según la estructura de la clase propuesta por el MEP (2012).
- Existe relación estrecha entre lo planeado y lo ejecutado, hay coherencia entre planeamiento, mediación pedagógica y resultados en relación con la integración de habilidades propuesta por cada docente.
- Se logró propiciar algunos procesos matemáticos, Representar fue el menos evidenciado.
- La estrategia de integración de habilidades se percibe positivamente para elaborar el planeamiento y favorecer la adquisición de habilidades por parte de los estudiantes (p. 74).

Investigación en 2016

Aunado a cambios en la malla curricular de Matemática y la necesidad de valorar de manera sistemática, el Sexto Informe del Estado de la Educación en el 2016 auspiciado por el Programa Estado de la Nación (PEN), se adelanta a la intención explícita de la Política Educativa de evaluar y otorgar algunos elementos por considerar para mejorar la calidad de la educación costarricense, con la ponencia “*Observación directa de ambientes de aprendizaje en centros educativos costarricenses con distinto desempeño*”, cuyo propósito general fue el de “identificar las características de los ambientes de aprendizaje en la materia de Matemática que se relacionan con el desempeño educativo de estudiantes de noveno año en centros educativos públicos y privados de secundaria” (Zúñiga et al, 2016, p.18).

Es importante mencionar que, para efectos de la investigación citada, se define desempeño educativo, en primera instancia, como el “grado de logro de los objetivos educativos o el nivel de conocimiento de los estudiantes tras las intervenciones educativas en un ciclo determinado, reflejado en las notas y promedios de las pruebas académicas” (Zúñiga et al, 2016, p.9), además, se valoraron aspectos como el éxito, retraso y abandono de los estudiantes en las instituciones educativas. En la presente investigación no se utiliza dicho término y se enfoca en aproximar la calidad de la mediación pedagógica en las prácticas de aula en las clases de Matemática a nivel de décimo año.

En relación con la dimensión Prácticas de Aula, Zúñiga et al (2016) centraron su atención en dos variables particularmente: el uso del tiempo de clase y las prácticas docentes para favorecer el aprendizaje durante el tiempo del que se dispone. Sin embargo, en relación al segundo aspecto, los investigadores plasmaron en su informe la necesidad de profundizar en la calidad de las prácticas educativas y lo puntualizaron de la siguiente forma:

- Profundizar los estudios sobre ambientes de aprendizaje, particularmente (1) el tiempo efectivo de aprendizaje y su relación con el desempeño educativo de los estudiantes. Específicamente, se refieren a las características (similitudes y diferencias) entre los ambientes de aprendizaje en primaria y secundaria y (2) indagar sobre aquellos factores de gestión institucional que favorecen o perjudican el desempeño educativo.
- Analizar el peso que el actual sistema de evaluación tiene en el diseño y aplicación de las prácticas de aula, particularmente sobre las prácticas docentes.
- Específicamente se refieren a (1) indagar en la posible necesidad de cambiar el sistema de evaluación y (2) el impacto en el desempeño estudiantil de aquellas actividades que promuevan un mayor margen de participación por parte de los alumnos.
- Profundizar sobre las condiciones que favorecen, apoyan y mantienen un buen desempeño docente. En detalle (1) posibles acciones del director para favorecer un desempeño docente excelente, (2) recursos didácticos y TIC's, y redes de colaboración docente que impulsen la excelencia, (3) pertinencia de las evaluaciones del desempeño docente y (4) Perfil profesional del docente de matemáticas del MEP.
- Analizar las estrategias docentes para promover el involucramiento sostenido de los alumnos en las lecciones, en detalle (1) efectividad de estrategias en relación con la población estudiantil, (2) diseño y gestión de actividades en relación con los periodos de atención y concentración de los estudiantes, (3) percepción del estudiantado sobre lo que es una “buena” clase de matemáticas y (4) relación entre las características de clase de aquellos alumnos que obtuvieron mejores puntuaciones en las pruebas PISA (pp. 90-91).

A través del recorrido realizado desde el 2004 hasta el 2016, se logra evidenciar el interés por conocer el impacto de los diferentes programas de Matemáticas del MEP y cómo la reforma aplicada en 2012 generó nuevas líneas de investigación, que implican profundizar en los diferentes componentes curriculares, de acuerdo con la fundamentación teórica que sustenta la propuesta y las tendencias de la Educación Matemática actual.

A continuación, se muestra el respaldo teórico de la presente investigación.

Marco teórico

Elementos curriculares del programa oficial

Tendencias pedagógicas y didácticas

Es importante señalar para efectos de esta investigación que los programas de Matemáticas están enmarcados en un paradigma emergente que integra tendencias pedagógicas como el Constructivismo de Piaget, el Socioculturalismo de Vygotsky y Kant, así como el Pragmatismo realista. Además, las tendencias didácticas vinculadas con ideas de la OCDE y los planteamientos teóricos de la corriente de la Educación Matemática Realista de Freudenthal, la experiencia en la lección japonesa y los ideas de la Escuela Francesa (MEP, 2012).

Las tendencias pedagógicas mencionadas se ubican en la corriente filosófica denominada Naturalismo y plantea que la Naturaleza es el principio de todas las acciones reales (Chávez, Deler y Suárez, 2009), el contexto es donde se generan los retos que la humanidad ha necesitado superar, por esta razón es coherente con la resolución de problemas. Asimismo, el Constructivismo, Socioculturalismo y el Pragmatismo realista favorecen las condiciones para enfrentar la Naturaleza, de tal manera que al plantearle un reto al estudiante se vea en la obligación de tomar decisiones y asumir un rol activo que le permita emitir juicios.

Además, las tendencias didácticas mencionadas son cognitivistas, pero se incluyen con una perspectiva profunda y específica de las Matemáticas, esto a través de la experiencia japonesa, francesa, norteamericana y de Freudenthal.

Organización de las lecciones: etapas y momentos

El currículo costarricense de Matemáticas asume como su enfoque principal la resolución de problemas con “énfasis en contextos reales” (MEP, 2012, p. 494), desde la perspectiva del desarrollo de la acción de aula mediante problemas o tareas que generen indagación. Se ofrece un modelo preciso de dos etapas y cuatro momentos. Durante la primera etapa se origina el aprendizaje de conocimientos y en la segunda la movilización y aplicación de los conocimientos.

Figura 2.1

Etapas y momentos de la estrategia metodológica de resolución de problemas según el MEP (2012)



Fuente: Elaboración propia a partir del MEP (2012, pp. 41-43).

El enfoque propone que la acción de aula parte de un problema o actividad que genere indagación (tareas matemáticas) y que haga referencia a habilidades generales y específicas de un o varias áreas matemáticas, que permita desarrollar la competencia matemática y las capacidades cognitivas superiores (MEP, 2012), sobre estos dos elementos se ampliará más adelante.

Valoración de los niveles de complejidad y procesos matemáticos

La malla curricular está conformada por los conocimientos, habilidades generales y específicas e indicaciones puntuales. Sin embargo, los fundamentos de los programas de estudio complementan y amplían los elementos curriculares, describen el papel de los procesos matemáticos, el enfoque en cada área, los propósitos transversales como el cultivo de actitudes y creencias positivas entre otros elementos curriculares.

Además, se incluyen tres “niveles de complejidad” para clasificar la demanda cognitiva de cada problema basado en el marco teórico de PISA 2003, a saber:

- **Reproducción.** En esencia se refiere a ejercicios relativamente familiares que demandan la reproducción de conocimientos ya practicados. Apelan a conocimiento de hechos y representación de problemas comunes, reconocimiento de cosas equivalentes, recolección de objetos matemáticos o propiedades, procedimientos rutinarios, aplicación de algoritmos estándar, manipulación sencilla de expresiones que poseen símbolos, fórmulas y cálculos sencillos.
- **Conexión.** Se basa en capacidades que intervienen en el nivel de reproducción, pero va más lejos. Remite a la resolución de problemas que no son rutinarios, pero se desarrollan en ambientes familiares al estudiante, la interpretación con exigencias mayores que en el grupo de reproducción, y algo que lo define: la conexión entre los diversos elementos, en particular, entre distintas representaciones de la situación.
- **Reflexión.** El elemento significativo es la reflexión, realizada en ambientes que son más novedosos y contienen más elementos que los que aparecen en el otro nivel de complejidad. Se plantea aquí la formulación y resolución de problemas complejos, la necesidad de argumentación y justificación, la generalización, el chequeo de si los resultados corresponden a las condiciones iniciales del problema y la comunicación de esos resultados. Se exige la participación de varios métodos complejos para su solución (MEP, 2012, p. 33).

Ruiz (2017) ofrece un modelo teórico denominado *Estructura de intervención de procesos en un problema (EIPP)* para valorar los niveles de complejidad con base en los cinco procesos matemáticos (capacidades superiores) que se proponen en los programas de estudio. De acuerdo con el autor, dichos niveles sintetizan la intervención de los procesos, es decir, éstos son el punto de partida para identificar el nivel de demanda cognitiva de una tarea matemática.

Se establecen 61 criterios o indicadores que definen operativamente la interacción de cada uno de los procesos matemáticos en una tarea, los cuales se agrupan de la siguiente manera: 18 para razonar y argumentar, 14 para planear y resolver problemas, 11 para comunicar, 6 para conectar y 12 para representar.

La lista de indicadores se complementa con una secuencia para realizar la “selección-diseño-valoración” del problema inicial, denominada *Estrategia “4+6” para la valoración de tareas matemáticas* (Ruiz, 2017), dicha propuesta contiene 4 pasos y 6 elementos:

- enunciar el problema,
- resolver el problema,
- identificar los conocimientos, habilidades y contextos presentes y
- valorar los procesos y niveles de complejidad.

La estrategia asume que las tareas matemáticas deben estar asociadas directamente a los elementos del currículo e involucrar conocimientos, habilidades y las capacidades superiores que se desean fortalecer.

El modelo propuesto por Ruiz (2017) inicia con “enunciar” la tarea o problema (una vez que se ha sido seleccionado y diseñado). En segundo lugar, se encuentra “resolver” la tarea o problema que implica proponer una o varias soluciones. Este paso es vital porque permite ver la argumentación que se realiza y situar en movimiento los objetos curriculares que luego se procederá a precisar.

El tercer paso de la estrategia consiste en “identificar” los primeros cuatro elementos curriculares que se consideran en la estrategia y que participan en el problema: conocimientos y áreas, habilidades generales y específicas según los programas de estudio, el tipo de contexto que involucra de acuerdo con estas cinco categorías: matemáticos, personales, ocupacionales, sociales y científicos.

Es importante señalar que en el cuarto paso “valorar”, se determinan los dos elementos que completan la estrategia 4+6, denominados: el grado de los procesos y el nivel de complejidad. En este paso se establece la intervención de cada proceso matemático durante la resolución de un problema y se ubican las actividades realizadas para este, en alguno de los tres niveles de complejidad de acuerdo con los indicadores de Ruiz (2017).

Seguidamente, se procederá a profundizar en los aspectos relacionados con la mediación pedagógica, considerando sus características en términos generales y en particular para la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas, así como el dominio afectivo del estudiante hacia esta disciplina.

Mediación pedagógica en Matemáticas

Criterios de calidad de la mediación pedagógica

En este apartado se contemplan aspectos relacionados con las actividades que propone el profesor durante la dinámica de clase, pero también las acciones que desarrolla para atender la diversidad, el uso apropiado y pertinente de recursos físicos o digitales, las estrategias de evaluación y retroalimentación, integrando todos estos elementos para generar ambientes de clase favorables al aprendizaje (Román, 2010).

En este sentido Román (2010), muestra que las clases más efectivas son aquellas en las cuales los estudiantes participan activamente, se favorece el trabajo colaborativo, se desarrolla una variedad de actividades (preferentemente lúdicas) y se utilizan múltiples recursos didácticos.

Sobre la evaluación, la misma autora rescata que el docente debe considerar la diversidad mediante la asignación de tareas diferenciadas, usar la retroalimentación y realizar la comunicación oportuna del nivel de avance a los estudiantes.

La planificación pertinente de las lecciones, en términos del tiempo dedicado al diseño de ambientes de aprendizaje y el trabajo conjunto entre docentes, es un aspecto de la labor del profesor que tiene también un peso en la mediación realizada y en la calidad de los aprendizajes adquiridos (Román, 2010).

Este último aspecto, está en estrecha relación con la planificación pertinente de las lecciones y el tiempo dedicado al planeamiento didáctico. Otro aspecto importante es que el trabajo conjunto entre docentes, conlleva realimentación que favorece la mediación pedagógica y, por ende, los aprendizajes adquiridos por los estudiantes (Román, 2010).

De acuerdo con la misma autora, la mediación pedagógica eficaz se caracteriza por:

- Propiciar un clima de aula positivo y enriquecedor.
- Implementar una metodología didáctica sostenida, que considere variedad de actividades, atención a la diversidad, seguimiento y retroalimentación oportunos.
- Realizar la gestión de aula orientada a la optimización del tiempo efectivo de aprendizaje.
- Planificar la clase de manera sistemática y consensuada, a largo plazo y centrada en los aprendizajes de los estudiantes, no en la instrucción (Román, 2010).

Por otro parte, los aspectos descritos hasta ahora sirven para caracterizar la mediación docente, independientemente de la asignatura. Otros investigadores se han preocupado

por caracterizar más a fondo las prácticas de los docentes de matemáticas que permiten desarrollar clases exitosas, en función de las habilidades, destrezas y procesos específicos que desde dicha disciplina se desean promover (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2015; Calvo, Deulofeu, Jareño y Morera, 2016). Tales cuestiones se profundizarán a continuación.

Calidad de la mediación docente en el aula de Matemáticas

La calidad está asociada a la adquisición, por parte del estudiante, de una serie de destrezas y habilidades que le permitan usar las Matemáticas de manera flexible y creativa en la resolución de problemas en diversos contextos dentro y fuera del entorno escolar.

El aprendizaje de conocimientos de esta disciplina está vinculado a la competencia matemática, que, en un sentido amplio, se refiere a las destrezas de los estudiantes para resolver o enunciar problemas matemáticos en diversos contextos de manera que analice, razone y comunique al menos una estrategia de solución válida (Rico, 2007; MEP, 2012; NCTM, 2015), y no solamente evidenciar su capacidad de recordar y reproducir algoritmos en casos muy particulares.

Algunos de los criterios que permiten determinar una gestión de aula efectiva y eficaz en relación con el desarrollo de destrezas matemáticas son:

- Promover el descubrimiento de propiedades, relaciones, procedimientos y estrategias.
- Propiciar la conversación, discusión y argumentación en el aula.
- Practicar procedimientos para poder automatizarlos, pero sin caer en el reduccionismo de que la solución de ejercicios repetitivos sea un fin en sí mismo.
- Considerar la diversidad de estilos de pensamiento y aprendizaje, por lo que es recomendable que todos los alumnos trabajen en las mismas actividades, pero incluyendo preguntas de distinto nivel de profundidad. También se debe evitar la reiteración de procedimientos, en caso de que los alumnos presenten dificultades (Calvo et al, 2016, p. 15).

En concordancia con lo anterior, el NCTM (2015) ha identificado a través de la observación de clase, una serie de prácticas que han servido para caracterizar procesos de mediación eficaces, que se mencionan a continuación:

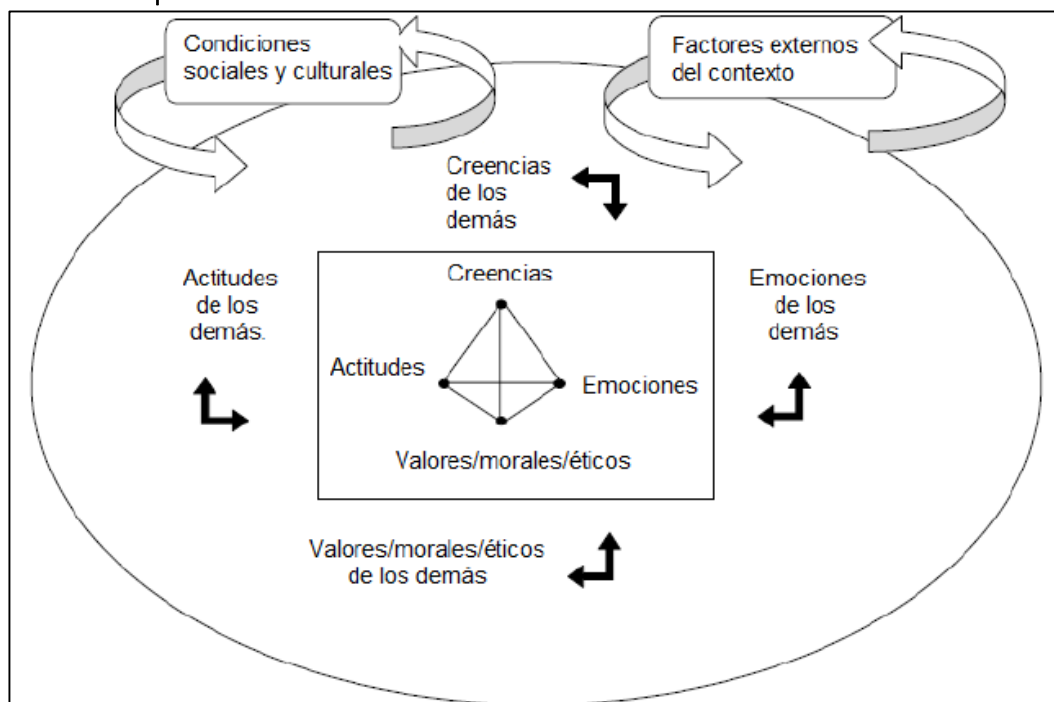
- Establecimiento de metas matemáticas enfocadas en el aprendizaje.
- Implementación de tareas que promuevan el razonamiento y la resolución de problemas.
- Uso y vinculación de las diferentes representaciones matemáticas.

- Favorecimiento de un discurso matemático significativo.
- Planteamiento de preguntas deliberadas.
- Elaboración de la fluidez procedimental a partir de la comprensión conceptual.
- Favorecimiento del esfuerzo productivo en el aprendizaje de las matemáticas.
- Obtención y utilización de las evidencias del pensamiento de los estudiantes (p. 10).

Dominio afectivo en la Educación Matemática

De acuerdo con Gil, Blanco y Guerrero citando a McLeod (1989), el dominio afectivo consiste en “un extenso rango de sentimientos y humores (estados de ánimo), que son generalmente considerados como algo diferente de la pura cognición, e incluye como componentes específicos de este dominio las actitudes, creencias y emociones” (2005, p.16). Además, se explica a través de un proceso cíclico que también involucra valores, como, por ejemplo, al realizar una tarea matemática el estudiante se enfrenta a diversos estímulos (complejidad de las tareas que asigna el docente, interacciones con otros estudiantes y el profesor, ambiente familiar, contexto de aula, entre otros) y sus reacciones van a estar condicionadas por sus creencias y valores. Si dichos estímulos se dan en repetidas ocasiones, se produce la misma clase de reacciones afectivas, entonces la respuesta emocional (satisfacción, ansiedad y frustración) puede ser “reafirmada” en actitudes que influyen de nuevo en las creencias y se reanuda el proceso, en la figura 2.2 se ilustra dicho proceso.

Figura 2.2
Modelo del tetraedro para describir el dominio afectivo



Fuente: DeBellis y Goldin (2006, p.135).

Para efectos de esta investigación, el dominio afectivo abarcará únicamente las *Creencias* como uno de los cuatro descriptores básicos incluidos en la figura 2.2. Éstas se subdividen según Gómez y Chacón (2007) en cuatro dimensiones:

Dimensión I: Creencias sobre el papel y el funcionamiento del profesor. Referida a las dimensiones cognitivas, motivadoras y afectivas del comportamiento de los profesores.

Dimensión II: Creencias sobre el significado y la competencia en Matemática. Referida a las creencias de auto eficacia y creencias sobre el valor de la tarea.

Dimensión III: Creencias sobre la matemática como actividad social. Referida a la utilidad de la matemática en la vida real y al hecho que la actividad matemática es una actividad humana.

Dimensión IV: Las matemáticas como un dominio de excelencia. Referidas a las creencias relativas a la orientación extrínseca de la meta relacionada con las Matemáticas y creencias de los estudiantes sobre las matemáticas y creencias sobre el aprendizaje y la resolución de problemas matemáticos más desde un punto de vista absolutista. (p. 130).

Los aspectos que se han considerado relevantes sobre la mediación pedagógica fueron

presentados previamente, para dar paso a las ideas involucradas con la macroevaluación, incluyendo elementos históricos y algunos aspectos sobre la calidad.

Pruebas estandarizadas en la asignatura de Matemáticas

La prueba escrita aplicada en este estudio fue proporcionada por la Dirección de Gestión y Evaluación de la Calidad (DGEC) del MEP, cuyos ítems pertenecen a la base de datos con que se confeccionan las pruebas de Bachillerato, razón por la cual es necesario incluir un apartado acerca de este tipo de instrumento de evaluación.

Las pruebas nacionales de Bachillerato tienen como propósito certificar el conocimiento del estudiante para alcanzar el perfil académico establecido en el currículo del nivel respectivo de educación (REA, 2009). La aplicación de éstas realiza una medición indirecta del fenómeno educativo donde las diversas condiciones de los estudiantes (culturales, sociales y económicas) influyen en su desempeño. Además, estas pruebas tienen influencia en la gestión de la enseñanza y aprendizaje, con especial énfasis en la secundaria, donde el bachillerato determina cuáles tópicos se desarrollan con más o menos rigor, incluso definen la inclusión o exclusión de un determinado conocimiento en dicha evaluación (Ruiz, 2018).

Matemática reporta en los últimos años el rendimiento más bajo al aplicar la prueba de Bachillerato. De acuerdo con el Informe del Estado de la Educación (2017) la promoción general, incluyendo todas las asignaturas pasó de 59,8% a 73,26%, del año 1996 al 2016, siendo este la mejor promoción de los últimos 21 años, debido a que, en el 2017 la aprobación fue del 70,17%. En las pruebas de bachillerato del 2016 y 2017, Matemáticas reporta el rendimiento más bajo entre todas las asignaturas evaluadas.

Según el *Informe Nacional sobre los resultados de las pruebas de Bachillerato* que publica anualmente la DGEC, en el 2016 se reportó un 77,42% de aprobación en Matemáticas, donde el 38% de los estudiantes alcanzó notas inferiores a 50. En el 2017 la aprobación disminuyó al 73,72%, y las notas inferiores a 50 alcanzaron el 42,9% de los examinados.

Es importante indicar que los programas de estudios de Matemáticas aprobados en el 2012 fueron evaluados de manera completa por primera vez en la modalidad académica en el 2016 y en la modalidad técnica en el 2017. No es posible realizar comparaciones de desempeño en las pruebas aplicadas antes del 2016, porque incluían los contenidos matemáticos desde la perspectiva de los programas del 2005.

Los bajos rendimientos mostrados en Matemáticas también son reportados por otras pruebas de macroevaluación, según el Informe del Estado de la Educación (2017), Costa Rica se ubica a 90 puntos por debajo del puntaje promedio de los países miembros de la OCDE en la última aplicación de la prueba PISA del 2015, lo que implica un rezago de 3 años en la formación matemática de los estudiantes.

Prueba de bachillerato y su correspondencia con el currículo de Matemáticas

De acuerdo a lo estipulado por el CSE la prueba de bachillerato se debe alinear a cada uno de los programas de estudios de las asignaturas evaluadas. En Matemáticas la prueba de bachillerato deberá responder al constructo principal de los programas que es la competencia matemática general, descrita en el siguiente texto:

(...) se interpreta aquí como una capacidad de usar las matemáticas para entender y actuar sobre diversos contextos reales, subraya una relación de esta disciplina con los entornos físicos y socioculturales y también brinda un lugar privilegiado al planteamiento y resolución de problemas. En esta visión la competencia matemática está definida por un poderoso sentido práctico (MEP, 2012, p. 14).

En la figura 2.3 se presenta la interrelación entre los elementos curriculares que conforman la competencia matemática.

Figura 2.3

Competencia matemática general y elementos curriculares que la alimentan



Fuente: Elaboración propia a partir de Ruiz (2018).

De acuerdo a lo expuesto en la figura 2.3, la competencia matemática general debe ser alimentada por las interacciones flexibles de todos los elementos curriculares.

Tradicionalmente el diseño de las pruebas de bachillerato responde a una visión conductista donde se inicia con un objetivo, se sigue con actividades para la enseñanza y se finaliza con la evaluación del producto. Dentro de esta visión, se considera que los objetivos generales pueden ser desagregados en una serie de objetivos específicos (más simples) y que, al ejecutar los segundos, se consigue cumplir con el primero.

De acuerdo con Ruiz (2018), este modelo de evaluación presenta obstáculos para valorar de manera pertinente el esquema propuesto en los programas de Matemáticas, debido a que han sido concebidos en un paradigma más constructivista y la evaluación planteada corresponde a un modelo conductista, asociada a la esquema estímulo-respuesta-recompensa, en un enfoque lineal, donde un reactivo se asociaría únicamente a una respuesta, en oposición a la propuesta ministerial que plantea la posibilidad de que un ítem inste al estudiante a elaborar diversas respuestas.

Otro aspecto que diferencia el tratamiento por objetivos del de habilidades es ¿cómo se relacionan entre sí?, los objetivos corresponden a entes separados sin intersecciones, que van de lo simple a lo complejo, mientras que las habilidades generales y específicas se integran de manera flexible y en diferentes grados de generalidad (Ruiz, 2018). No necesariamente un conjunto de habilidades específicas supone la consecución de una habilidad general, incluso existe intersección entre habilidades de diferentes áreas matemáticas, se considera que el aprendizaje no es acumulativo ni secuencial.

Si se desea valorar la competencia matemática en una prueba de bachillerato, lo primero es lograr coherencia con los programas oficiales, las tareas matemáticas o ítems podrán ser incluidas si se construyen tomando en cuenta la diferencia entre el tratamiento por objetivos y por habilidades, así como la integración de los otros elementos curriculares (procesos matemáticos y niveles de complejidad).

En la prueba se debe potenciar el trabajo con asignaciones complejas, desde diferentes puntos de vista, que integren la interacción de los conocimientos, habilidades generales, habilidades específicas, capacidades cognitivas superiores y procesos matemáticos, contextos reales y niveles de complejidad que corresponden a elementos curriculares.

Para concluir este apartado, es importante señalar que los instrumentos de evaluación que se diseñen, deben ser capaces de aproximar la presencia de los procesos matemáticos y capacidades cognitivas superiores, que son observables en la solución escrita de una tarea o ítem, incluso es necesario reflexionar si con solo una prueba es posible recolectar evidencias sobre los conocimientos adquiridos por los estudiantes.

Marco metodológico

El trabajo de aula “ha sufrido” una transformación debido al cambio en los programas, esto ha implicado el aprender y desaprender sobre la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas, por tanto, los investigadores del presente estudio son docentes universitarios con experiencia en secundaria, que han dedicado algunos años a estudiar y comprender la reforma curricular iniciada en 2012, que han producido material didáctico para formación docente con el objetivo de facilitar la aprehensión de los fundamentos curriculares y la comprensión de la perspectiva de las áreas matemáticas, entre otros. Debido a esas características fueron considerados para colaborar en este proceso que requería de la inmersión en el campo de académicos con formación en Educación Matemática y docentes con una perspectiva amplia de la implementación curricular.

Con la intención de establecer una visión integral de lo que sucede en las clases de Matemáticas, el equipo investigador a partir de la experiencia en secundaria, elaboró instrumentos para registrar información sobre el docente, el estudiante y el tiempo relacionado con las actividades que desarrollan los alumnos, los materiales didácticos que se utilizan y los procesos matemáticos que se propician. Además, se consideró pertinente realizar el análisis de la prueba escrita desde dos perspectivas: cuantitativa y curricular.

A continuación, se detalla el diseño de investigación, la muestra, los instrumentos empleados y el tratamiento de los datos.

Diseño de investigación

La presente investigación pretendió aproximar la calidad de la mediación pedagógica en Matemáticas tomando en cuenta el rol del docente, las actividades del estudiante y los programas de estudio (MEP, 2012) mediante la observación de aula, cuestionarios y prueba escrita, lo que permitió la recolección de datos numéricos analizados estadísticamente para caracterizar las prácticas de aula, por tanto, se ubica en el paradigma cuantitativo, con un diseño de investigación descriptiva (Hernández, Fernández y Baptista, 2014; Villalobos, 2017).

Es necesario indicar que la generalización no está entre los alcances de este estudio, por lo que, los datos aquí expuestos, solamente se deben interpretar para el contexto estudiado.

Muestra

Los participantes en este proceso de investigación fueron 30 grupos de estudiantes de colegios públicos y 5 de colegios privados, todos en décimo año con su respectivo profesor de Matemáticas. La muestra fue aleatoria en una población seleccionada por conveniencia y facilitada por el equipo técnico del Estado de la Educación, siguiendo criterios de viabilidad y representación para lograr un estudio que permitiera hacer conclusiones sobre el contexto seleccionado.

Las instituciones educativas participantes pertenecen al Gran Área Metropolitana (GAM) ampliada, se incluyen desde Turrialba hasta Grecia, todas diurnas y académicas con el fin de facilitar la logística de la investigación y el plan de análisis. En cada centro educativo se realizaron observaciones en dos fechas distintas al mismo grupo de décimo año.

Instrumentos

Protocolo para la observación de aula

Se tomó como referencia el protocolo confeccionado por el equipo de Zúñiga et al (2016) en el que se utilizó el método de observación de *Stallings* como principal. Las modificaciones responden a la inclusión de elementos propios de la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas y las características de los observadores, ya que, eran docentes de matemáticas con grado mínimo de licenciatura obtenido en universidades públicas, profesores de la Cátedra de Didáctica de la Matemática en la UNED, con experiencia en enseñanza media y conocedores de los programas oficiales del MEP. La toma de decisiones con respecto a la elaboración de este instrumento conllevó un riguroso proceso de pilotaje y homologación de jueces como estrategia de validación (Ver Anexo 1).

Las modificaciones principales se asocian con el tipo de actividades del docente y el estudiante, ya que, mantienen una estrecha relación con las que comúnmente se utilizan para enseñar y aprender Matemáticas. Además, la sección de *Desempeños Esperados del docente*, se transformó en un conjunto de consideraciones sobre el conocimiento pedagógico y del contenido matemático.

Se incorporó el registro de la presencia de los cinco procesos matemáticos mediante acciones observables que fueron categorizadas a través de tres indicadores para cada uno.

La versión final (Anexos 2 y 3) incluyó tres partes, una cubierta donde se registraban elementos vinculados con asuntos administrativos como el nombre del docente, institución, número de estudiantes del grupo objeto, hora de inicio de la clase entre otras preguntas. La segunda parte estuvo constituida por 10 instantáneas, la primera aplicada

a los 3 minutos de iniciada la clase según horario institucional y después en periodos de 7 minutos. La tercera parte, contenía una escala de calificación que registraba la presencia o ausencia de aspectos vinculados con el desempeño docente, las habilidades matemáticas desarrolladas durante la clase y una clasificación de acuerdo con el tipo de propósito, introducción de un conocimiento nuevo o fortalecimiento de habilidades específicas.

Este instrumento permitió caracterizar en función del tiempo, la mediación pedagógica tomando en cuenta actividades del estudiante y del docente, los materiales didácticos utilizados y los procesos matemáticos propiciados. Asimismo, recolectar evidencias para construir criterios de calidad sobre la mediación pedagógica en Matemáticas.

Cuestionario docente

Se confeccionó con dos partes, la primera planteaba preguntas sobre la edad, años de servicio, títulos académicos obtenidos y capacitaciones recientes de los programas de Matemáticas, esta sección se envió en línea y aquellos docentes que lo deseaban lo completaron en físico.

La segunda parte consistía en un conjunto de ítems sobre los procesos matemáticos, la orientación del currículo, los momentos para la organización de las lecciones y los niveles de complejidad de los problemas (MEP, 2012), finalmente, una pregunta relacionada con la autopercepción del nivel de logro alcanzado sobre la o las habilidades perseguidas y una valoración del desempeño del grupo en la clase desarrollada. La selección de los ítems responde a la necesidad de establecer el nivel de conocimiento de los docentes sobre el currículo (Mercado, 2002), esto tiene como propósito construir alguna clasificación entre los docentes observados. Es importante indicar que esta parte del instrumento fue entregada inmediatamente después de finalizada una clase de 80 minutos y contestada por el docente en presencia de uno de los investigadores (Ver Anexo 4).

Este instrumento permitió caracterizar la población docente, determinar cuánto sabían de los fundamentos del currículo de Matemáticas vigente y establecer algunos criterios del docente ideal, requerido por nuestro país, para el éxito de la implementación de los programas de estudio aprobados en 2012.

Prueba escrita

El proceso inició con la aplicación de una prueba de selección única que contenía ítems con el formato empleado en bachillerato y de acuerdo con las habilidades específicas para décimo año, esta tarea fue diseñada y dirigida por el Estado de la Educación en coordinación la DGEC del MEP. Cabe mencionar que la prueba medía conocimientos de

décimo año, los cuales no se habían desarrollado previo a la aplicación, con el propósito de realizar una comparación entre las calificaciones obtenidas en la prueba, antes y después de la mediación pedagógica, sin embargo, la segunda aplicación no se logró ejecutar de manera completa en las instituciones participantes por razones ajenas al equipo de investigación.

En ambas ocasiones, el instrumento fue aplicado de forma sincrónica a todos los estudiantes del grupo objeto por institución, como tradicionalmente se ejecutan las pruebas escritas en los periodos de evaluación, un docente de la institución fungía como el “cuidador” y los estudiantes no podían tener comunicación de ningún tipo durante el periodo de aplicación de la prueba (Ver Anexo 5).

Esta labor estuvo a cargo del equipo técnico del Estado de la Educación, la aplicación de la prueba se realizó en febrero y marzo, a un total de 792 estudiantes, la segunda se ejecutó en setiembre y octubre, a 213 alumnos. Los resultados fueron analizados cuantitativamente y se detallarán más adelante.

Además, la estructura de la prueba fue sometida a un análisis curricular, según el modelo propuesto por Ruiz (2017) que permitió evidenciar la cantidad de ítems por área, nivel de complejidad y otros aspectos relevantes para establecer el nivel de congruencia con los programas oficiales del MEP (2012).

Cuestionario sociodemográfico

Fue construido por el equipo técnico del Estado de la Educación y aplicado simultáneamente con la prueba escrita, contenía 14 ítems con el fin de caracterizar la población estudiantil en cuanto a: sexo, edad, educación preescolar, repitencia en etapa escolar, arrastre de asignaturas en el colegio, persona que le ayuda a hacer tareas, nivel máximo de estudios que posee dicha persona, horas semanales dedicadas a estudiar Matemáticas, tipo de ayudas que recibe (económica, alimentación o transporte), nivel socioeconómico y creencias hacia la disciplina en estudio (Ver Anexo 6).

A través de estos cuatro instrumentos se recolectaron datos que mediante técnicas de análisis estadístico produjeron los resultados que se presentan en la siguiente sección.

Tratamiento de los datos

Creación de los perfiles estudiantiles

En primera instancia, se realizó un tratamiento descriptivo de los datos con ayuda de teoría para crear tipos de creencias de los estudiantes hacia el aprendizaje de la matemática, resultando en tres variables:

- Estudiantes con creencias positivas hacia el aprendizaje de las Matemáticas.
- Estudiantes con creencias ambivalentes hacia el aprendizaje de las Matemáticas.
- Estudiantes con creencias negativas hacia el aprendizaje de las Matemáticas.

Por criterio de experto se decidió que este tipo de agrupación era la idónea para perfilar a los estudiantes según el propósito de esta investigación.

Además, se realizó la descripción de cada grupo de acuerdo a la calificación obtenida en cada prueba y variables socio-demográficas, tomando en cuenta los valores de eta superiores a 0.10.

Creación de grupos o clúster de docentes

Se propone generar indicadores que califiquen de manera más estricta el nivel de conocimiento de los programas MEP (2012) por parte de los docentes participantes, estos nuevos indicadores consisten en variables dicotómicas que dan una calificación de 1 si tuvo todas las respuestas correctas en cada pregunta y 0 en el caso contrario.

A partir de estas nuevas calificaciones se procede a generar los clústeres para el docente mediante dos métodos diferentes: un primer método en donde se realiza un análisis de factores con los nuevos indicadores para determinar si matemáticamente se sugiere alguna unión o separación de factores y mediante estos resultados generar los clústeres; y un segundo método que consiste en generar una calificación general de todos los indicadores y con esta realizar los clústeres. Como se verá más adelante, se utilizan los Etas de asociación y la capacidad de discriminación de los clústeres generados en cada caso para tomar la decisión de cuál es el método más adecuado para clasificar a los docentes.

Método con factores

Pese a que el análisis de factores sugirió la utilización de algunos indicadores fusionados, los Etas de asociación indican que la relación entre éstos es muy baja, por lo que la unión no proporciona información adecuada.

Método con calificación total

Se procedió a construir una calificación total estandarizada (para obtener valores entre 0 y 10) con las notas de los cinco indicadores por separado y se generaron los clústeres.

En este caso sí hay una clara separación entre los docentes que obtienen “bajas” calificaciones y “altas” calificaciones. Al calcular los Etas de asociación para la calificación total se obtiene un valor significativamente alto 0.834, por lo que, este método se considera el adecuado para determinar los grupos de clasificación.

Calificación del desempeño esperado por el docente

Se construyó a partir del ítem 17 del cuestionario docente con el que se evaluaban los siguientes factores:

- Incorpora elementos del contexto en las actividades propuestas.
- Muestra dominio de los conocimientos matemáticos en estudio.
- Muestra dominio didáctico de los conocimientos matemáticos.
- Permite el trabajo independiente de los estudiantes.
- Dispone del tiempo para que los estudiantes tengan el espacio para desarrollar trabajo matemático.
- Plantea preguntas para establecer relaciones con los conocimientos previos de los estudiantes.
- Plantea preguntas orientadoras para apoyar la construcción de conocimiento de los estudiantes.
- Responde a las preguntas de los estudiantes con otras preguntas que favorecen la construcción de respuestas por parte del estudiante (sin dar a ellos la respuesta).

En algunos casos, estos criterios no eran aplicables por lo que, existía la opción NA. Primero se recodificaron los valores NA con una puntuación positiva, es decir, se les daba el mismo valor que cuando el criterio sí se presentaba y de esta forma, no se sancionaba la presencia de los NA en la calificación. El desempeño docente consiste en una calificación promedio de la presencia o no de los factores enumerados, por lo que no corresponde a un indicador como tal.

Calificación de Idoneidad del perfil docente

Se determinó, por criterio de experto, que el docente ideal podría ser calificado según los siguientes aspectos:

- Poseer grado académico mínimo Licenciatura en Enseñanza de las Matemáticas.
- Distribuir de manera efectiva el tiempo con respecto a la estructura de la clase.
- Dominar el conocimiento matemático
- Dominar el conocimiento pedagógico
- Dominar el currículo
- Mantener formación continua
- Ser coherente con la percepción del desempeño académico de los estudiantes respecto a las habilidades perseguidas y la autopercepción sobre el nivel de logro alcanzado.
- Proponer actividades de aprendizaje que impliquen exigencia cognitiva para los estudiantes.
- Considerar en la mediación pedagógica diversidad de actividades y materiales.

Cada aspecto contenía variables que fueron recodificadas con puntuaciones de 0 y 1, dependiendo de si la respuesta brindada era correcta (en el caso del cuestionario docente) o ideal (información obtenida de las observaciones de clase).

El propósito de este análisis es ofrecer información de la idoneidad del perfil según la calificación que obtiene el docente con base en una puntuación máxima de 26.

Construcción del modelo de explicación de cambio de calificación en la prueba escrita

Con el fin de explicar si existió o no algún cambio en la calificación (negativo, positivo), se realizó un modelo de regresión logístico con una significancia del 5%. Para tal efecto, solo se tomaron en cuenta los alumnos de los colegios públicos y privados, que sí aplicaron la prueba en las dos ocasiones (I y II). Se utilizó como variable dependiente la calificación obtenida en cada una de las pruebas.

Análisis de las observaciones de clase

Con el fin de generar los resultados en donde se toman en cuenta las dos observaciones, primero se procedió a estimar por separado, los porcentajes de tiempo ocupado en cada actividad y cada material utilizado, para la observación 1 y la observación 2. Luego, para obtener los porcentajes de tiempo totales se estimó un promedio con el que se presentan los datos en los cuadros y gráficos correspondientes.

Resultados

En este apartado se presentan los datos recolectados en las instituciones públicas y se utilizan los datos de las privadas como referencia. Se inicia por caracterizar el docente como responsable de la calidad de la mediación pedagógica y los estudiantes por ser partícipes principales del proceso educativo.

Luego se muestra el tiempo invertido en las actividades que se desarrollan, los materiales didácticos que se utilizan, los procesos matemáticos que se propician en la clase y la comparación entre las dos observaciones realizadas en cada colegio. Además, se incluye una sección elaborada a partir de lo observado y criterio de experto, acerca del perfil idóneo del docente de Matemáticas y se describe un caso excepcional.

Seguidamente, se presenta el análisis cuantitativo de las calificaciones obtenidas en la I y II aplicación de la prueba escrita, así como la comparación que surge del cambio o mantenimiento de la nota, después de recibir siete meses de clases. Posteriormente, se muestran los resultados generales del análisis curricular de la prueba aplicada y se amplía la información en el Anexo 11.

Finalmente, se incluyen los resultados obtenidos en las instituciones privadas, siguiendo la misma línea del análisis realizado en los colegios públicos.

Docentes

El análisis se realiza a partir de las condiciones sociodemográficas, formación académica, capacitación recibida y nivel de conocimiento sobre el contenido, la pedagogía y el currículo.

En el cuadro 4.1 se incluye la información resumida en tres bloques: las variables sociodemográficas, condiciones de trabajo, conocimiento y formación en los programas oficiales.

Cuadro 4.1

Distribución de docentes de colegios públicos por variables sociodemográficas, condiciones de trabajo, conocimiento y formación en los programas oficiales

Sociodemográficas	Cantidad	Condiciones de trabajo	Cantidad	Conocimiento y formación en los programas oficiales	Cantidad
Género		Tipo de contrato		Conocimiento de los programas oficiales	
Femenino	17	Interino	9	Aceptable	8
Masculino	13	Propietario	21	Por mejorar	22
Edad		Lecciones laboradas		Formación continúa en los últimos 5 años	
De 20 a 29 años	1	De 20 a 25	2	Con capacitación	21
De 30 a 39 años	11	De 26 a 30	4	Sin capacitación	9
De 40 a 49 años	15	De 36 a 40	9		
De 50 a 59 años	3	De 41 a 45	8		
		De 46 a 48	7		

Educación superior		Categoría salarial	
Bachillerato	5	Mt-4	5
Licenciatura	20	Mt-5	7
Maestría	5	Mt-6	18

Fuente: Elaboración propia a partir de los datos brindados por los docentes participantes a través del cuestionario, 2018.

Se trabajó con un grupo de docentes con una distribución casi equitativa por género, las edades predominantes se encuentran entre los 30 y 49 años, con licenciatura como grado dominante. La mayoría tienen nombramiento en propiedad, 24 de 30 trabajan 36 o más lecciones semanales y una cantidad similar posee las categorías salariales más altas.

Se destaca que hay 8 docentes con un conocimiento aceptable de los programas, además 21 de ellos han recibido al menos una capacitación sobre estos en los últimos cinco años, en el Anexo 7 se detalla el procedimiento seguido para extraer esta información. La característica relacionada con el conocimiento que poseen los docentes acerca de los programas oficiales se abordará en la siguiente sección de forma independiente por la relevancia y tratamiento que se le dio en este estudio.

Los datos recopilados indican que la mayoría de docentes 22 de 30, tiene su formación base como bachilleres en universidad pública, donde únicamente 11 obtuvieron la licenciatura en este tipo de institución y que en general, son pocos los interesados en obtener titulación de máster y cuando lo han hecho, recurren a las instituciones privadas. Sin embargo, tres quintas partes ascendieron a la máxima categoría salarial estudiando el Diplomado en Enseñanza para I y II Ciclo de la Educación General Básica.

Con las preguntas del cuestionario docente, también se generaron indicadores que calificaran de manera estricta el nivel de conocimiento del docente sobre los programas de estudio, estos consistieron en variables dicotómicas que dan valor de 1 si el docente obtuvo todas las respuestas correctas en cada pregunta y 0 en caso contrario.

Respecto a las preguntas vinculadas con los fundamentos de los programas y los procesos matemáticos, únicamente 6 docentes de 30 acertaron la respuesta. Al consultar sobre la orientación del currículo 22 de los 30 docentes indicaron correctamente que es por habilidades y solo una tercera parte logró identificar los momentos para la organización de la lección y los niveles de complejidad de los problemas (Ver Anexo 8).

La calificación total obtenida permitió generar dos grupos o clúster denominados: con *Conocimiento aceptable* y con *Conocimiento por mejorar*, se seleccionaron estos nombres debido a que solo dos profesores obtuvieron todas las respuestas correctas. El primer grupo se conformó por 8 docentes, 2 obtuvieron un 10 y los otros 6 calificaciones entre 6 y 8 inclusive, mientras que en el segundo hubo 22 personas con notas inferiores a 4, de

los cuales 2 obtuvieron un 0, 12 alcanzaron un 2 y el resto lograron entre 4 y 6, todo lo anterior en una escala de 1 a 10.

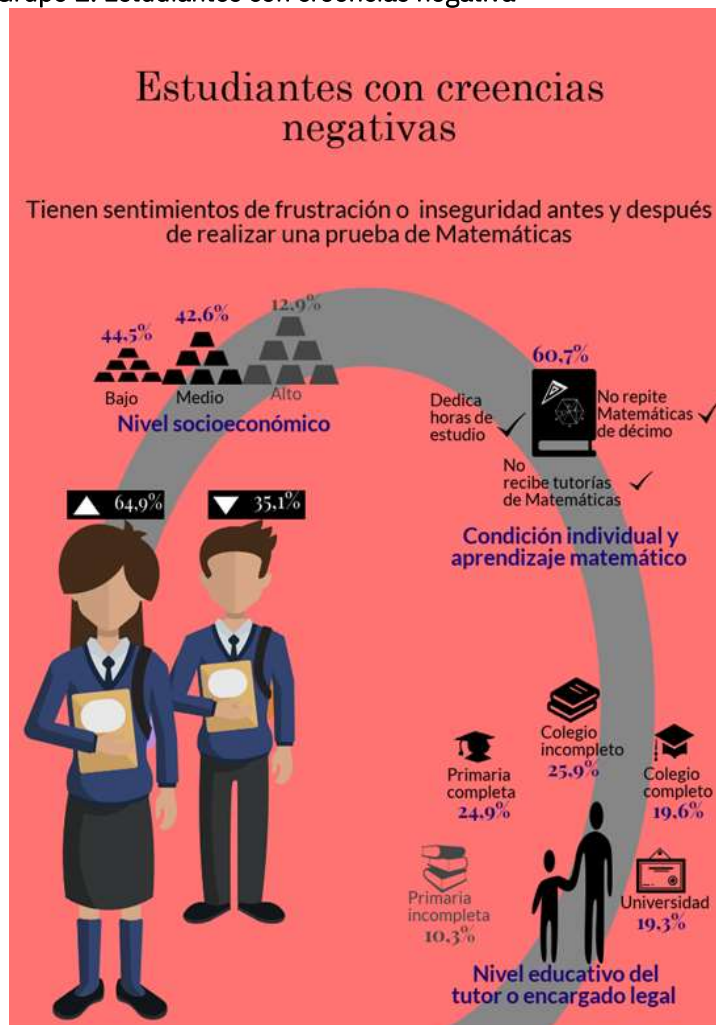
Estos datos ponen en evidencia que a pesar de que los programas entraron en vigencia hace 5 años, los docentes participantes no tienen dominio de dicho texto, por lo que se considera un hallazgo revelador en cuanto a la relación entre lo observado en las aulas y lo esperado por el MEP (2012) en las clases de Matemáticas.

Estudiantes

Se identificaron tres grupos segregados por sus creencias hacia el aprendizaje de la Matemáticas, las cuales están vinculadas con sentimientos o emociones tanto positivas como negativas. Además, se indica la distribución por sexo, estrato socioeconómico, condiciones de aprendizaje y nivel educativo de los tutores legales. La expresión “antes o después de una prueba” se refiere a lo que los estudiantes manifestaron creen sentir cuando realizan pruebas, no porque el equipo investigador haya constatado esta afirmación con otra técnica o instrumento.

Figura 4.1

Grupo 1: Estudiantes con creencias negativa



Las personas se caracterizan por presentar sentimientos de frustración o desmotivación antes y después de realizar un examen.

Representan el 50,5% de la muestra, en su mayoría son mujeres de estrato socioeconómico bajo a medio y solo el 60,7% cumplen con condiciones de aprendizaje ideales.

Por otra parte, sus padres o tutores legales no se agrupan de acuerdo con un grado académico específico sino que se distribuyen entre primaria completa hasta el grado universitario.

Fuente: Elaboración propia a partir del cuestionario sociodemográfico.

Figura 4.2
Grupo 2 Estudiantes con creencias ambivalentes

Los individuos se distinguen por mostrar sentimientos de frustración o desmotivación antes de un examen y la situación contraria después de realizado o viceversa.

Representan el 34,5% de la muestra, están equiparados en cuanto al sexo y nivel socioeconómico, el 76,8% cumplen con condiciones de aprendizaje ideales y el nivel educativo de sus padres o tutores legales se reparte más del 80% entre primaria completa, colegio incompleto y universidad.



Fuente: Elaboración propia a partir del cuestionario sociodemográfico.

Figura 4.3
Grupo 3 Estudiantes con creencias positivas



Fuente: Elaboración propia a partir del cuestionario sociodemográfico.

Los integrantes se caracterizan por evidenciar sentimientos o emociones positivas y optimistas tanto antes como después de realizar un examen.

Representan el 15,5% de la muestra, en su mayoría son hombres de estrato socioeconómico bajo (51,9%) y cumplen con condiciones de aprendizaje ideales (dedican horas de estudio, no reciben tutorías de Matemáticas y no repiten Matemáticas de décimo año), lo cual viene acompañado de padres o tutores legales con un nivel educativo que oscila entre colegio incompleto y universidad.

Con la información anterior, se evidencia la heterogeneidad entre los estudiantes y sus creencias hacia las Matemáticas, al respecto el MEP (2012) señala la importancia de que el docente conozca el tipo de creencias y emprenda acciones para transformarlas en solo positivas, de esta manera favorecer la Educación Matemática y ser coherente con la política educativa vigente, la que plantea y se denomina *La persona: centro del proceso educativo y sujeto transformador de la sociedad*.

Se procede a detallar los hallazgos relacionados con la mediación pedagógica de acuerdo con los elementos observados durante las lecciones.

Mediación pedagógica

En esta sección se aproximará la mediación pedagógica a partir de los actores involucrados: el docente y los estudiantes. Respecto a los primeros, se determina la calificación de su desempeño en las clases, la distribución del tiempo en cuanto a las diversas actividades y materiales didácticos empleados; además, se identifican los procesos matemáticos propiciados. De los segundos se indica la distribución del tiempo en los mismos aspectos que en los primeros.

Es necesario aclarar que, para el registro de la observación de clase, se establecieron dos tipos de actividades: de aprendizaje y de no aprendizaje, por lo que los resultados de los docentes y los estudiantes estarán relacionados con esta segregación.

Desempeños esperados del docente

Durante las observaciones de clase, se registró el desempeño de los docentes para generar una calificación que consideraba elementos vinculados con el conocimiento del contenido, de la didáctica (a través de un indicador cada uno). Además, la mediación pedagógica se valoraba a partir de los siguientes descriptores:

- Presencia del contexto en las actividades propuestas para la enseñanza.
- Favorecimiento del trabajo de los estudiantes para realizar las tareas matemáticas.
- Planteamiento de preguntas para indagar los conocimientos previos, favorecer la construcción del conocimiento u orientar el trabajo de los estudiantes.

En el instrumento correspondiente se consideraron muchos elementos generales de la mediación pedagógica como: propiciar el trabajo matemático de los estudiantes y plantear preguntas con diversos objetivos, esto permitió que ambos grupos de docentes alcanzaran una calificación similar, sin embargo, los indicadores relacionados con aspectos específicos de la disciplina como el dominio de los conocimientos matemáticos y didácticos, limitaron la obtención de mejores calificaciones y el establecimiento de diferencias significativas en el desempeño de cada grupo.

Cuadro 4.2

Desempeño esperado del docente de colegio público respecto al grupo al que pertenece

	Conocimiento aceptable		Conocimiento por mejorar	
	Promedio	Desviación estándar	Promedio	Desviación estándar
Observación 1	6.79	2.50	6.61	2.74
Observación 2	6.25	2.11	5.69	2.61
Desempeño promedio	6.52	1.35	6.15	2.27

Fuente: Elaboración propia a partir de los datos de la observación de prácticas de aula, 2018.

Ambos grupos de docentes muestran un desempeño promedio similar, sin superar el 7, sin embargo, se destaca mayor variabilidad en el rango de notas del segundo que está conformado por los docentes que deben mejorar su conocimiento acerca de los programas, pues la desviación estándar es de 2,27. Con respecto a la segunda observación se evidencia que las calificaciones en ambos grupos son menores que en la primera y se resalta que en el grupo de conocimiento por mejorar obtiene un promedio menor a 6.

Estos datos son coherentes con las actividades propiciadas por el docente, las realizadas por los estudiantes, el tipo de material y estrategias metodológicas observadas, que se indicarán posteriormente, porque evidencian el desarrollo de clases que en su mayoría no se relacionan con la propuesta del MEP (2012).

Tiempo en actividades y uso de material didáctico por parte del docente

Otro elemento importante en la mediación pedagógica es la distribución del tiempo que el docente hace, de acuerdo con la diversidad de actividades y materiales didácticos que se emplean para el desarrollo de la clase.

La información que se presenta con respecto a la distribución del tiempo de las actividades se hace de dos maneras:

- Estructura general de una clase dividida en tres categorías: actividades de aprendizaje (azul), sin relación con el aprendizaje (rojo) y de gestión (verde).
- Listado de actividades según las categorías anteriores.

Cuadro 4.3

Tiempo promedio utilizado por el docente de colegio público según el tipo de actividad que desarrolla y el grupo al que pertenece

Actividades	Conocimiento aceptable	Conocimiento por mejorar
Actividades relacionada con el aprendizaje	77%	73%
Actividades sin relación con el aprendizaje	1%	7%
Actividades de gestión	21%	20%
Total	100%	100%

Fuente: Elaboración propia a partir de los datos de la observación de prácticas de aula, 2018.

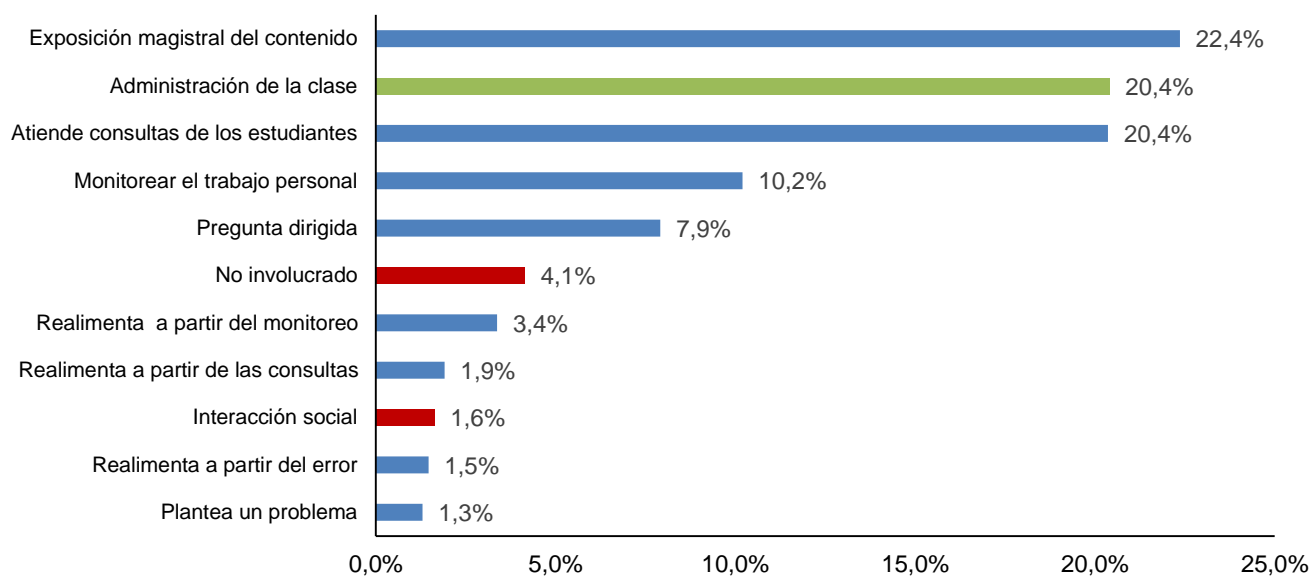
De acuerdo con el cuadro 4.3, ambos grupos de docentes, distribuyeron el tiempo en las tres actividades descritas de manera muy similar. Se destaca que los docentes que requieren mejorar sus conocimientos sobre los programas, emplean 6% más de su tiempo en actividades no relacionadas con el aprendizaje.

En el Anexo 9 hay datos que señalan que los docentes del primer grupo, monitorean el trabajo personal en un 4% de tiempo más que el segundo y usan el error como recurso para ofrecer un *feedback* a sus estudiantes (2%). Estas acciones son concordantes con las tendencias pedagógicas y didácticas de los programas oficiales, que establecen una marcada diferencia con los programas del MEP del 2005. Sin embargo, se destaca que ambos grupos emplean la exposición magistral del contenido en un porcentaje de tiempo similar, aproximadamente un 22%.

Por tanto, se nota una tendencia en aquellos docentes que poseen un conocimiento aceptable de los programas, hacia una mediación pedagógica más orientada a la supervisión y realimentación del trabajo individual cuando se realizan tareas matemáticas.

Gráfico 4.1

Tiempo promedio de las actividades desarrolladas por los docentes de colegios públicos según cada categoría



Fuente: Elaboración propia a partir de los datos de la observación de prácticas de aula, 2018.

De acuerdo con el gráfico 4.1, la exposición magistral del contenido, la administración de la clase y la atención de consultas presentan una distribución superior al 20% cada una, la pregunta dirigida y el monitoreo del trabajo personal se colocan como la cuarta y quinta acción más empleada.

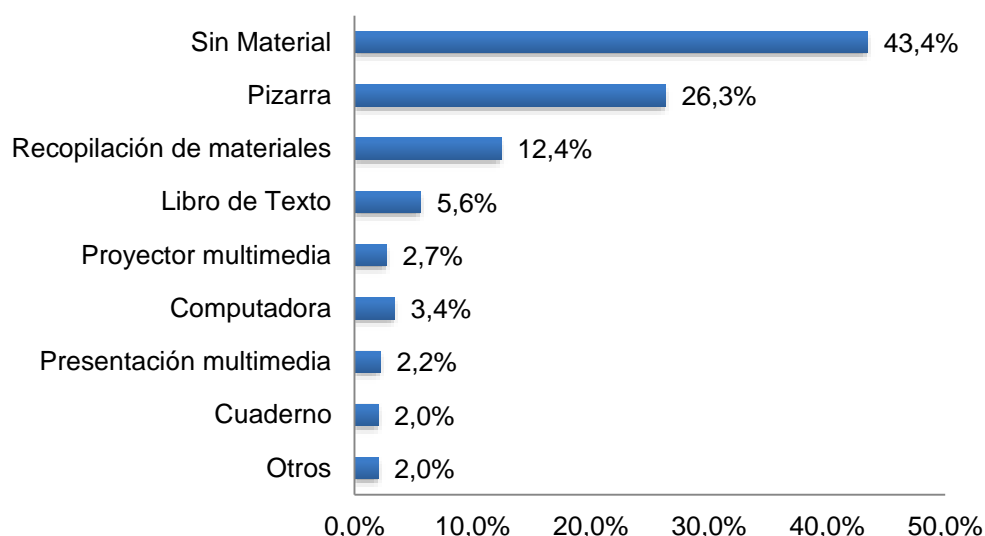
Otros datos indican que en la distribución de tiempo por parte del docente predominan las actividades de aprendizaje con un 74%, asimismo dedica aproximadamente un 20% a la gestión administrativa como pasar lista, revisar trabajos o atender reclamos de evaluación, únicamente el 5,7% en promedio del tiempo se invierte en actividades que no se relacionan con el aprendizaje (Ver Anexo 10). Es importante señalar que el docente no plantea problemas dentro de sus acciones, solamente un 1,3% del tiempo fue usado para esta actividad, con este dato se evidencia la no aplicación de la estrategia metodológica “Resolución de Problemas” indicada por el MEP (2012).

A pesar de la cantidad de actividades relacionadas con el aprendizaje que puede utilizar el docente en la clase, se siguen empleando las tradicionales, como se evidencia en los porcentajes obtenidos en “Exposición Magistral del Contenido” y “Atención de consultas”.

Otro aspecto importante, es que el tiempo destinado a “Realimentar a partir del error” es de 1,5%, lo cual no es coherente con la propuesta ministerial que le da énfasis al tratamiento del error como fuente de aprendizaje.

Gráfico 4.2

Tiempo promedio empleado por los docentes para uso de los materiales didácticos



Fuente: Elaboración propia a partir de los datos de la observación de prácticas de aula, 2018.

*Nota: No se registró el uso de material lúdico, hoja de cálculo, celulares y aplicación de matemáticas en línea. La categoría “Otros” está conformada por material concreto, calculadora y software matemático.

La utilización de la pizarra y el uso de materiales recopilados por el docente alcanzan el 38,7% del tiempo promedio observado, mientras que *Sin material* obtuvo un 43,4%, esto se justifica cuando el profesor propicia actividades en las que los estudiantes son los protagonistas, como es el caso de trabajo personal, resolución de ejercicios o cuando plantea consultas.

Se debe señalar que ninguno de los recursos tecnológicos digitales considerados alcanzó el 4% del tiempo para propiciar el aprendizaje (gráfico 4.2). Durante el trabajo de campo, se observó el uso de la computadora con fines personales (pasar lista, ver libro de texto en formato pdf, consultar materiales recopilados, entre otros). El proyector y las presentaciones multimediales se utilizaron para sustituir la pizarra y en algunos casos el material elaborado contenía tamaño de letra, color y calidad de proyección inadecuada.

Asimismo, al emplear los recursos tecnológicos digitales se evidenció un manejo didáctico deficiente, por ejemplo, el docente proyecta una página de la práctica, resuelve con los estudiantes los ejercicios presentados, escriben las respuestas en la pizarra. Luego el profesor, sin dar un tiempo prudencial, para revisar y corregir la práctica (debido

a que no quiere transcribir los ejercicios en la pizarra y ahorrar tiempo), cambia la página y queda información incongruente con la nueva imagen proyectada.

Al respecto, MEP (2012, p. 37) señala que el uso de tecnología “no conduce necesariamente al mejoramiento de los aprendizajes en las Matemáticas, peor aún, un mal uso puede debilitarlos”, por tanto, se vuelve trascendente que el uso pertinente de las tecnologías digitales, para garantizar una mejor mediación pedagógica y no convertirlas en obstáculos.

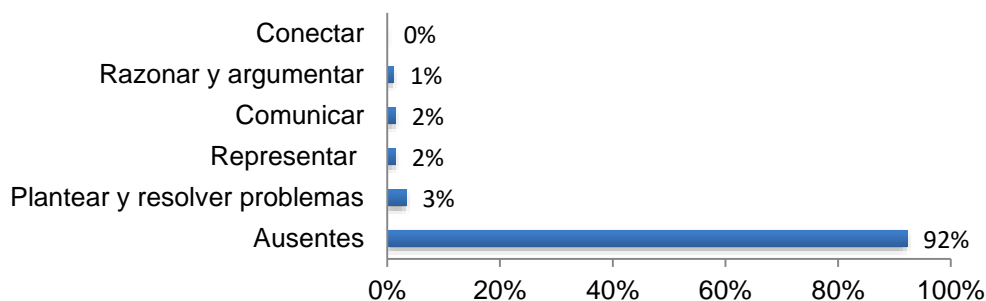
Procesos matemáticos

El tiempo apropiado para propiciar los procesos matemáticos en las clases, de manera que se empleen de acuerdo al marco teórico del MEP (2012), puede ser un indicador de la mediación pedagógica eficaz de acuerdo con lo expuesto por la NCTM (2015) y Calvo et al (2016). Por esta razón, se considera necesario presentar los datos de dos formas, la primera mediante la presencia de los procesos matemáticos en general y la segunda de acuerdo con los indicadores de cada proceso.

Es importante aclarar que a pesar de observar en la mayoría de las lecciones temas del área de Relaciones y Álgebra, no se espera la presencia de algún proceso matemático específico, debido a que estos, no se vinculan con las áreas, sino con problemas o situaciones que produzcan un reto en el estudiante, al respecto Ruiz (2018) indica que solo una buena tarea matemática o problema puede activar todos los procesos matemáticos.

Gráfico 4.3

Porcentaje de tiempo según la presencia de algún proceso matemático en clases de colegios públicos



Fuente: Elaboración propia a partir de los datos de la observación de prácticas de aula, 2018.

*Esta información corresponde únicamente a lo registrado en el Grupo en General.

Cuadro 4.4

Porcentaje de tiempo en el que se presentó algún indicador de procesos matemáticos en los estudiantes de colegios públicos según el grupo al que pertenece el docente

Procesos	Conocimiento aceptable	Conocimiento por mejorar
Enuncian hechos, definiciones o fórmulas (RA1)	0%	0,3%
Utiliza ejemplos o contraejemplos para fundamentar ideas (RA2)	0%	0,1%
Describe o explican sus razonamientos (inducción, deducción o generalización) (RA3)	1,3%	0,8%
Utiliza las definiciones, fórmulas o algoritmos (PyR1)	0%	2,9%
Encuentra respuestas o soluciones para la situación planteada (PyR2)	0%	0%
Verifica las soluciones obtenidas (PyR3)	0%	0,5%
Reconoce las diferentes representaciones de un conocimiento matemático (R1)	0%	0,1%
Interpreta la información brindada a través de las diferentes representaciones de un conocimiento matemático (R2)	0,7%	0,7%
Manipulan diferentes representaciones de un conocimiento matemático (R3)	4,5%	0,7%
Identifica el lenguaje matemático involucrado en la situación planteada (CM1)	0,5%	0,2%
Expresa sus ideas matemáticas usando diferentes vías de comunicación (CM2)	1,5%	0,8%
Utiliza el lenguaje matemático correcto al expresar sus ideas (CM3)	0%	0,5%
No hay proceso presente	91,1%	92,3%
Total	100%	100%

Fuente: Elaboración propia a partir de los datos de la observación de prácticas de aula, 2018.

*Las siglas están asociadas con los procesos matemáticos de la siguiente manera, RA: Razonar y Argumentar, PyR: Plantear y Resolver problemas, R: Representar, CM: Comunicar y C: Conexión, el número 1, 2 y 3 establece el indicador empleado.

** Esta información corresponde únicamente a lo registrado en el Grupo en General.

En el gráfico 4.3 y el cuadro 4.4, se demuestra que en más del 90% del tiempo observado no hubo evidencia de los procesos matemáticos, Representar es el que tiene mayor presencia de sus indicadores con un 6% y que fue más propiciado por los docentes que

tienen un conocimiento aceptable de los programas. Además, es importante señalar que los docentes con conocimiento por mejorar favorecen el proceso Razonar y Argumentar en su nivel más básico: utilizar definiciones, fórmulas o algoritmos, alcanzando un 3%. Conectar es un proceso del todo ausente, los estudiantes no expresaron ninguna relación entre el conocimiento adquirido con otras áreas como Geometría, Probabilidad, Biología o Estudios Sociales debido a que no se plantearon situaciones de aprendizaje en las que se requiriera hacer algún vínculo.

La siguiente información se analiza considerando que en la mayoría de instituciones educativas se observaron 160 minutos segregados en 20 instantáneas, en las cuales se registraban datos de dos estudiantes (E1 y E2) que se destacaron dentro del grupo en general respecto a los indicadores de los procesos matemáticos según MEP (2012).

Los colegios 7 y 30 no evidenciaron la presencia de ningún proceso en la primera observación, el 10, 16, 20, 22, 28, 24, 29 y 35 no lo hicieron en la segunda y en el 2, 4, 6, 11, 15 y 32 estuvieron completamente ausentes. Lo esperado por el equipo investigador era la presencia de 2 indicadores de procesos en al menos 6 instantáneas de la 4 a la 10.

Cuadro 4.5

Presencia de procesos matemáticos en los estudiantes E1 y E2 según el código del colegio público y el número de observación

Código de colegio	Observación	Cantidad de veces que se presentaron procesos para estudiante 1													Cantidad de veces que se presentaron procesos para estudiante 2												
		Py R1	Py R2	Py R3	RA 1	RA 2	RA 3	CM 1	CM 2	CM 3	R 1	R 2	R 3	C 3	Py R1	Py R2	RA 1	RA 2	RA 3	CM 1	CM 2	CM 3	R 1	R 2	R 3	C 1	
3	I						3																				
	II						3				1							1									
7	II	1																									
9	I				2			1														1					
	II		2			1	2											1					1	1	2		
10	I						1					1															
12	I			1					1	2								1									
	II					2			1																1		
14	I	1				1			1			1										1					
	II								1				1								2						
16	I												2					1						1			
17	I	1					1		1													1					
	II					1															2						
18	I	1	1																								
	II		1																								
19	I			1					1																		
	II				1																2						
20	I	1																									
21	I								2	1											1		1				
	II								2	1											1		1				
22	I					1			1												1						
23	I				2		1																				
24	I							1																1			
25	I	1		1					2	1											1		2				
	II								1	1													1				
26	I					1																					
27	I								2	1											1		2				
28	I				3		1					1									2		1				
29	I							2																			
30	II									1													1				
31	I																					1					
	II																				1				1		
33	I		1		1	1		1																			
	II					1																					
35	I							1															1				

Fuente: Elaboración propia a partir de los datos de la observación de prácticas de aula, 2018.

*Las siglas están asociadas con los procesos matemáticos de la siguiente manera, RA: Razonar y Argumentar, PyR: Plantear y Resolver problemas, R: Representar, CM: Comunicar y C: Conexión, el número 1, 2 y 3 establece el indicar empleado.

En el cuadro 4.5 se observa que 14 instituciones solo presentaron entre 1 y 4 indicadores, 6 colegios entre 5 y 8 y 4 de 9 en adelante, esto implica que únicamente 4 instituciones propiciaron en promedio un proceso por cada dos instantáneas, situación que no satisface lo esperado por el equipo investigador.

Estos resultados se justifican porque en las clases observadas no se emplearon situaciones retadoras que son las que propician la aparición de los procesos matemáticos, como se indicó previamente.

Tiempo en actividades y uso de material didáctico por parte del estudiante de colegios públicos

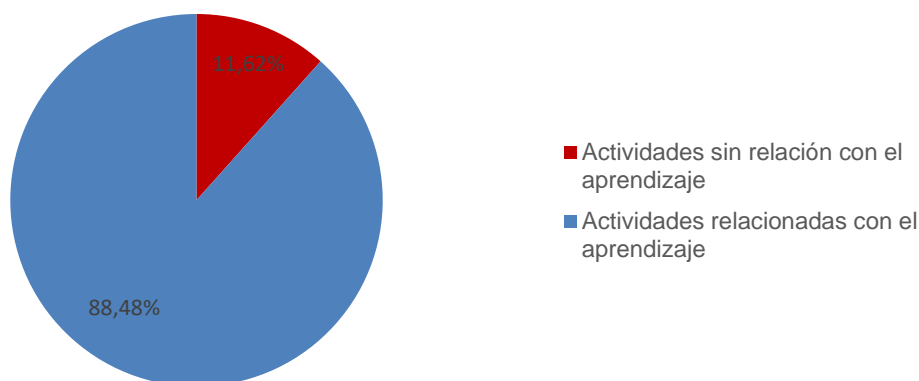
En la mediación pedagógica también se debe considerar la distribución del tiempo al que se someten los estudiantes, de acuerdo con la diversidad de actividades y materiales didácticos.

La información se presenta de forma similar a la utilizada en el apartado de los docentes:

- Estructura general de una clase dividida en dos categorías: actividades de aprendizaje (azul) y sin relación con el aprendizaje (rojo).
- Listado de actividades según las categorías anteriores.

Gráfico 4.4

Distribución del tiempo en actividades de aprendizaje y de no aprendizaje vivido por los estudiantes de colegios públicos



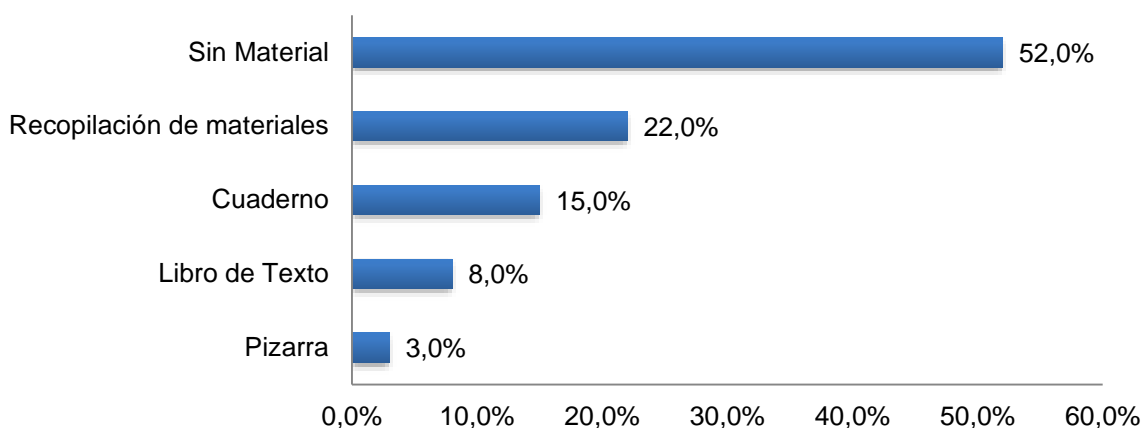
Fuente: Elaboración propia a partir de los datos de la observación de prácticas de aula, 2018.

De acuerdo con el gráfico 4.4, en más del 88% del tiempo se le permitió a los estudiantes experimentar actividades relacionadas con el aprendizaje, El porcentaje correspondiente a las actividades sin relación con el aprendizaje se debe al tiempo en que los docentes realizan actividades de gestión (Cuadro 4.3), las cuales se limitan a la primera y segunda instantánea que no superan los 11 minutos iniciales, por tanto, se espera que los estudiantes *no estén involucrados e interactúen socialmente* entre ellos. Sin embargo, los datos indican que además algunos alumnos permanecen “Prestando atención” y en “Trabajo Personal”, aun cuando no sea una indicación expresa del docente. Según Román (2010) corresponde a un indicador de la mediación pedagógica eficaz, porque la gestión de aula está orientada a la optimización del tiempo efectivo de aprendizaje.

Seguidamente, en el gráfico 4.5, se puede observar que los estudiantes no emplean ningún material de clase durante la mayoría del tiempo efectivo, esto se puede asociar con la actividad de aprendizaje “Presta atención” o las de no aprendizaje “Interacción social” y “No involucrado”, siendo congruente con lo que se observa en el gráfico 4.5.

Gráfico 4.5

Tiempo promedio usado por los estudiantes de colegios públicos según tipo de material



Fuente: Elaboración propia a partir de los datos de la observación de prácticas de aula, 2018.

*Nota: No se registró el uso de material lúdico, material concreto, presentación multimedia, smart TV, computadora, proyector multimedia, hoja de cálculo, calculadora, celulares, aplicación de matemáticas en línea, software matemático y pizarra inteligente.

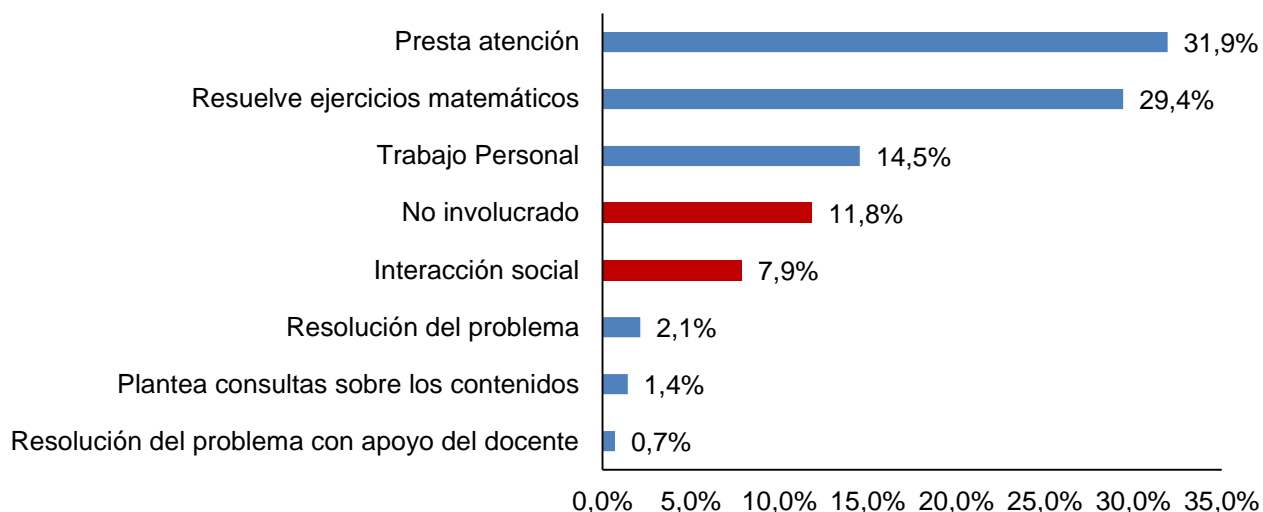
En el gráfico 4.5, se destaca la ausencia de materiales con un 52% del tiempo observado y del 48% restante se nota la carencia del uso de tecnologías digitales, que de acuerdo con el MEP (2012) corresponde a un eje disciplinar que potencia la enseñanza efectiva de las Matemáticas. Otro aspecto relevante, es que un 30% del tiempo efectivo de clase, el estudiante utiliza textos (libro o recopilación) para apoyar su aprendizaje a través de la presentación de contenidos matemáticos y un listado de ejercicios propuestos, que ha sido seleccionado previamente por el docente.

De esta manera queda evidenciado, que, en las clases observadas, los materiales didácticos utilizados son los que año tras año se han utilizado para aprender y enseñar Matemáticas, más grave aún es la ausencia de las tecnologías digitales. Al respecto, en los programas se menciona:

Las tecnologías pueden ser un poderoso aliado para potenciar el pensamiento matemático. Y es precisamente en la resolución de problemas en entornos reales donde éstas pueden aportar sus beneficios de la mejor manera, en contextos de aprendizajes que fortalezcan las habilidades y capacidades matemáticas. En ese sentido refuerzan la implementación de los ejes disciplinares articuladores y añaden medios para conectar la Educación Matemática local con tendencias educativas y culturales dominantes en el mundo. La dinámica histórica actual pronostica una penetración más intensa de todas las tecnologías en la vida social del país y del mundo (MEP, 2012, p.37).

Gráfico 4.6

Distribución del tiempo promedio para las actividades de los estudiantes de colegios públicos



Fuente: Elaboración propia a partir de los datos de la observación de prácticas de aula, 2018.

Pese a que en el gráfico 4.4 se nota que no hay una pérdida de tiempo importante, en el gráfico 4.6, se evidencia que los estudiantes están en actividades pasivas, predominando prestar atención, resolver ejercicios matemáticos y el trabajo personal que incluía tomar notas en su cuaderno o copiar de la pizarra, con casi un 76%. Poco menos del 20% del tiempo fue usado por algunos estudiantes para socializar entre ellos y no estar involucrados en la clase que se desarrollaba. Aun cuando los programas oficiales de Matemáticas proponen los problemas como herramienta fundamental, la presencia de acciones estudiantiles sobre estos se reduce a un 2%.

A continuación, se presentan datos que permiten establecer la relación entre las actividades desarrolladas por los estudiantes y los dos grupos de docentes identificados que las proponen.

Cuadro 4.6

Tiempo promedio utilizado por el estudiante de colegios públicos según el grupo al que pertenece el docente

Actividades	Docentes con Conocimiento aceptable	Docentes con Conocimiento por mejorar
Relacionadas con el aprendizaje	87%	77%
No relacionadas con el aprendizaje	13%	23%
Total	100%	100%

Fuente: Elaboración propia a partir de los datos de la observación de prácticas de aula, 2018.

Se puede observar en el cuadro 4.6 que los docentes del primer grupo propician más actividades relacionadas con el aprendizaje, superando el segundo grupo hasta en un 10%.

Además, los datos mostraron que los docentes, con conocimiento aceptable de los programas, propiciaron que los estudiantes realizaran más trabajo personal hasta en 7% y el porcentaje de tiempo en el que los estudiantes estuvieron no involucrados fue menor que en el otro grupo de docentes, la diferencia alcanzó un 6% (Anexo 9), esto último coincide con la afirmación del PREMCR (2015) sobre la obtención de mayor interés por parte de los estudiantes en clases que incluyan la resolución de problemas.

En síntesis, respecto a la mediación pedagógica, después de describir el uso de los materiales, actividades del estudiante y docente, los desempeños esperados de este último y el comportamiento de los procesos matemáticos en el desarrollo de las lecciones, se puede señalar que:

- No se encontró evidencia significativa de la aplicación de la estrategia metodológica principal (resolución de problemas) propuesta en los programas del MEP(2012); incluso, aquellos docentes cuyo conocimiento de los programas fue aceptable no marcan una diferencia sustancial en la mediación pedagógica, debido a que continúan empleando: la clase magistral, ejercicios rutinarios, material didáctico tradicional en la misma proporción que el grupo de profesores que debe mejorar sus conocimientos, no obstante, pese a lo anterior, esos educadores sí tienden a supervisar el trabajo personal y realimentar a partir del error. La situación general expuesta no era la esperada a siete años de entrada en vigencia de la reforma curricular.
- El aprendizaje de los estudiantes carece de situaciones retadoras que favorezcan el desarrollo de los cinco procesos matemáticos, que se podrían lograr a través de la

planificación por parte del docente de tareas matemáticas que involucren los cinco ejes disciplinares:

- la resolución de problemas como estrategia metodológica principal,
- la contextualización activa como un componente pedagógico especial,
- el uso inteligente y visionario de tecnologías digitales,
- la potenciación de actitudes y creencias positivas en torno a las Matemáticas y
- el uso de la historia de las Matemáticas (MEP, 2012, p. 17).

Lo anterior pone en evidencia la necesidad de fortalecer y perfeccionar las habilidades y competencias del docente para ejecutar una mediación pedagógica de acuerdo con lo establecido por el MEP (2012).

A continuación se presentan algunas características, que a criterio de los investigadores con respecto al contexto estudiado, conforman el perfil idóneo del docente de Matemáticas

Idoneidad del perfil

De acuerdo con los resultados de la investigación (en particular del protocolo de observación y cuestionario docente), se puede establecer para esta experiencia, que la idoneidad del docente para el área de Matemáticas estará constituida por al menos las siguientes características:

- Poseer grado académico mínimo Licenciatura en Enseñanza de las Matemáticas.
- Se asume un profesional que siempre está en una búsqueda permanente de mejores explicaciones a las situaciones de aprendizaje que le corresponde enfrentar. Además, se supone que posee un conocimiento general sobre su área de trabajo y que es capaz de identificar un problema que requiere una descripción básica para generar una explicación razonable y a partir de esto, construir una propuesta de solución. Este profesional está en capacidad de emplear estrategias básicas de investigación (diseños generalmente simples) que le permitan recopilar evidencias e identificar sus interrelaciones con el contexto inmediato (Alfaro, 2018).
- Distribuir de manera efectiva el tiempo con respecto a la estructura de la clase
- El profesional organiza el tiempo que dispone para la lección en tres partes: introducción, desarrollo y cierre, en la primera, se espera que el docente utilice un máximo de 5 minutos para funciones consideradas administrativas (pasar lista, dar instrucciones o hacer una introducción general).

- En la segunda, emplear en promedio 65 minutos para el desarrollo del proceso de enseñanza y aprendizaje (PEA) de conocimientos matemáticos.
- En la tercera se podrá utilizar un máximo de 10 minutos al finalizar la clase para emitir una conclusión de la sesión de trabajo, comunicar acciones futuras y realizar atención de consultas individuales.
- Dominar el conocimiento matemático
- El docente durante el desarrollo de la clase trabaja los conocimientos matemáticos involucrados sin incurrir en errores conceptuales.
- Dominar el conocimiento pedagógico
- El docente evidencia el conocimiento pedagógico mínimo cuando realiza las siguientes acciones durante la ejecución de una lección: incorporar el contexto en las actividades de aula, permitir el trabajo personal de los estudiantes, brindar el tiempo para ejecutar esta acción, explorar mediante preguntas los conocimientos previos y orientar a través de la misma estrategia la construcción del conocimiento (NCTM, 2015). Además, es necesario conocer y aplicar la didáctica específica de la Geometría, Relaciones y Álgebra, así como de la Estadística y Probabilidad (áreas matemáticas del ciclo diversificado), de manera que se demuestre dominio didáctico del conocimiento matemático.
- Dominar el currículo
- Debido a que el mayor empleador ha establecido lineamientos para la organización de la lección y otros elementos que se deben reflejar en las acciones de aula, el profesional debe mostrar un dominio de las siguientes nociones: estrategia metodológica y sus componentes, estructura de los programas oficiales, procesos matemáticos, momentos del aprendizaje y niveles de complejidad en las tareas asignadas.
- Mantener formación continua
- El profesor debe mostrar evidencias de formación continua, que garantice su actualización en temas del currículo, del conocimiento matemático y pedagógico. Es necesario aclarar que en este caso el interés fue identificar capacitaciones sobre los programas oficiales en un periodo menor o igual a 5 años, debido a la entrada en vigencia de estos en 2013.
- Ser coherente con la percepción del desempeño académico de los estudiantes respecto a las habilidades perseguidas y la autopercepción sobre el nivel de logro alcanzado.

- El profesional al finalizar las lecciones, debe estar en la capacidad de establecer de manera coherente la relación entre la percepción del desempeño académico de los estudiantes respecto a las habilidades perseguidas y la autopercepción sobre el nivel de logro alcanzado por ellos. Debido a que, esto pone en evidencia si establece alguna responsabilidad personal en el aprendizaje obtenido por sus estudiantes, independientemente de si resultado es bueno, regular o deficiente.
- Proponer actividades de aprendizaje que impliquen exigencia cognitiva para los estudiantes
- El profesor debe propiciar en un periodo de 80 minutos (dos lecciones) como mínimo y en particular, que los estudiantes planteen preguntas o resuelvan problemas, que permitan evidenciar al menos un proceso matemático producto de las actividades propuestas.
- Considerar en la mediación pedagógica diversidad de actividades y materiales
- El profesional debe realizar en un periodo de 80 minutos, al menos una actividad de gestión y tres actividades distintas de aprendizaje, además de emplear material diferente al cuaderno, pizarra, libro de texto o recopilación de material fotocopiado, pues su uso ha sido frecuente en los procesos educativos en cualquier asignatura y no hace diferencia entre tipos de docentes, ni la mediación que propician.

En resumen, estas nueve características conforman el perfil docente idóneo básico, de acuerdo con este estudio, para poder ejecutar la propuesta curricular de acuerdo con lo establecido por el MEP (2012).

Los resultados obtenidos por los 30 docentes participantes de colegios públicos.

Tomando en cuenta los nueve aspectos antes descritos que conforman la nota máxima (100) con una puntuación de 26, se obtuvo que 19 de 30 docentes de colegios públicos no logran alcanzar 70 como nota mínima de idoneidad y solo 1 supera el 90. Los aspectos que en su mayoría evidencian debilidades corresponden a los enumerados por 5, 6 y 8.

Caso excepcional

Se considera pertinente exponer desde una perspectiva cualitativa el trabajo de un docente de la muestra, que evidencia de manera integral los elementos del marco teórico y los datos registrados. Este profesor obtuvo una calificación cercana al 90 pero no la superó, sin embargo, el equipo investigador decidió profundizar su accionar, debido a que, se contaba con la información completa: dos observaciones de aula, datos del cuestionario docente y dos aplicaciones de la prueba escrita.

La clase de Matemáticas con el *profesor W*¹

En la comunidad el sol es ardiente, se aproxima la hora del almuerzo, ya casi todos los estudiantes están dentro del aula conversando con el profesor, los pupitres están predispuestos en subgrupos de cuatro.

Se escucha el timbre, señal de que la clase debe iniciar, el *profesor W* invita a los jóvenes a ocupar sus lugares y de inmediato comienza a pasar lista. Los estudiantes, preparan sus cuadernos, calculadoras y lapiceros.

Al concluir con la lista y recordar que se aproxima la fecha de la prueba, procede a encender el proyector multimedia, con él muestra la imagen de un joven de décimo año del colegio frente a la portería de la cancha de fútbol intentando detener un penal, con base en la imagen, les propone a los estudiantes resolver un problema, este plantea el reto de determinar aproximadamente el tiempo en segundos que tarda el balón en alcanzar el punto más alto de su trayectoria de acuerdo con ciertos parámetros.

El *profesor W* les indica que tienen 15 minutos para resolver el problema y que algunos podrán exponer sus estrategias de solución después de transcurrido ese tiempo, los estudiantes de inmediato comienzan a conversar con los compañeros que tienen cerca, se les escucha decir “Miguel hagamos un dibujo con los datos que nos dan”, “Podemos aproximar el valor haciendo tanteo en la fórmula ¿no es cierto?” “Sara verdad que podemos usar una escala de 5 en 5 para darnos una idea, ¿qué piensas?”.

Mientras la clase se llena de murmullos, reglas que se comparten, teclas de calculadora que con su “tac” interrumpen el silencio, el tiempo transcurre. De inmediato el *profesor W*, se pasea por el aula, supervisando el trabajo de cada subgrupo, atiende sus consultas e identifica los errores, les plantea preguntas con el objetivo de promover alguna reflexión sobre las actividades que los estudiantes están registrando en sus cuadernos, sin darles respuestas exactas. No han transcurrido cinco minutos, cuando Luis llama al *profesor W* y le dice:

Luis: Profe, verdad que si aplico la fórmula del vértice de la función cuadrática, ya encuentro la respuesta.

Profesor W: ¿Por qué usted sabe esa fórmula?

Luis: Yo soy repitente y este mae está en MATEM.

Profesor W: Comprendo!!! ¿Qué les parece tratar de hallar la respuesta sin usar la fórmula del vértice y junto con los otros dos compañeros, verificar luego si la estrategia que están usando o creando ustedes da los mismo que la fórmula.

Luis: No había pensado en eso profe, vamos a ver si sirve!!!!

Después de esta conversación, el grupo de manera afanosa sigue tratando de hallar una respuesta, mientras que el *profesor W*, sigue monitoreando los equipos de trabajo. Ha comprobado que prácticamente todos los grupos encontraron alguna respuesta y que sus estrategias de solución son matemáticamente correctas.

El docente revisa su reloj y comprueba que a los 20 minutos ya puede iniciar con la siguiente actividad. Se coloca frente a la pizarra y les dice a los estudiantes que ahora van a conversar sobre las estrategias de solución que han empleado. Sin dar instrucciones adicionales, los estudiantes giran

¹ Los nombres de las personas participantes en esta narración han sido cambiados para resguardar el anonimato.

sus pupitres hacia a la pizarra y adoptan una posición de atenta escucha. El profesor pregunta a los estudiantes si hay algún voluntario que desee compartir su respuesta, de inmediato al menos una mano por subgrupo se levanta y agita.

El profesor *W*, de manera intencional no le permite al grupo de Luis ser los primeros en exponer, le otorga ese espacio al grupo que se ubicaba cerca de la puerta, cuyos “tac” en sus calculadoras fueron constantes.

Emilia es la vocera del grupo, se pone de pie y en la pizarra hace algunas anotaciones, un dibujo y explica como con ayuda de sus compañeros lograron hallar cuánto tiempo tardó el balón en alcanzar la altura máxima. Después, el profesor *W* plantea la pregunta ¿qué piensan de esa respuesta? ¿es correcta o incorrecta, por qué? ¿Hay algo que cambiar o mejorar?

Entonces, Sara levanta la mano y dice que los resultados son muy parecidos, que solo varían algunos decimales, pero que ellos usaron una escala de 5 en 5 y que su gráfico permite ver mejor la forma de una curva hacia abajo.

El docente de pie junto a la pizarra, hace algunas anotaciones, con base en el comentario Sara, sobre el trabajo que dejó Emilia escrito en ella, luego, lanza la siguiente pregunta al grupo de Luis ¿nos pueden contar qué hicieron en el subgrupo de ustedes?

Luis responde que hicieron prácticamente lo mismo, pero que, además, conocían una fórmula que permitía encontrar de manera directa, el momento, es decir el segundo, cuando el balón alcanzaba la altura máxima y explicó a sus compañeros la siguiente idea “debido a que es una curva hacia abajo hay un punto máximo y la fórmula del vértice permite calcular ese valor”. El estudiante se puso de pie, escribió la fórmula, sustituyó los datos y el valor encontrado coincidía con la información que ya estaba en la pizarra.

Un estudiante levanta la mano y dice “Profe, por qué no nos enseñó eso desde antes, era más fácil y rápido”, el Profesor *W*, le explica que el problema era la introducción a la función cuadrática y que todo el trabajo que habían hecho le permitiría desarrollar los conocimientos relacionados con el tema y que Luis y sus compañeros se habían adelantado, pero que eso era un “plus”, debido a que no tendría que convencerlos de la utilidad de la fórmula del vértice en este tipo de función.

Posteriormente, el docente mediante una exposición, logró relacionar las acciones de los estudiantes con las nociones básicas de la función cuadrática como: parámetros, ecuación canónica, concavidad y vértice, de esta manera formalizó las ideas matemáticas involucradas. Posteriormente, en los últimos 8 minutos de la clase, utilizando el proyector y con un software libre para graficar curvas, les mostró a los estudiantes como al cambiar los parámetros a , b y c de la función, la gráfica invertía su concavidad, la posición del vértice cambiaba y su intersección con el eje Y .

Cerró la clase diciéndoles que profundizarían en el tema la siguiente lección, momento en el que sonó el timbre para señalar el fin de la clase. Los estudiantes, recogieron sus pertenencias y alinearon los pupitres, esto último atendiendo a la indicación del docente, mientras se escuchaban conversaciones sobre el almuerzo y las lecciones de la tarde.

A partir de la narración anterior, se debe reflexionar sobre qué hace que un profesor diferencie su mediación pedagógica, de la que ejecuta la mayoría de los docentes. Seguidamente se puntualizan algunos aspectos:

Idoneidad del perfil del profesor W

El profesor protagonista de la lección, posee 8 de las 9 características deseables de acuerdo con la propuesta de “Idoneidad del perfil”, la primera es ser licenciado en Enseñanza de las Matemáticas con la capacidad de evidenciar e identificar interrelaciones con el contexto inmediato y esto se evidencia al plantear un problema que vincula al equipo de fútbol institucional.

La segunda, el profesor logra distribuir de manera efectiva el tiempo según la estructura básica de la clase: introducción, desarrollo y cierre.

Respecto a la tercera y cuarta característica, demostró un dominio del conocimiento matemático y pedagógico del contenido, el observador logró comprobar rigurosidad y exactitud durante la formalización de los conocimientos. Además, empleó la resolución de problemas como estrategia metodológica, organizó la lección en cuatro momentos (Ver figura 2.2, página 26), que fueron evidentes en la narración, primero el problema contextualizado y conectado con la física, luego el trabajo en grupos, posteriormente la socialización de los resultados y por último, la formalización de los conocimientos matemáticos involucrados; asimismo permitió al estudiante razonar y argumentar en subgrupos, posteriormente favoreció la comunicación y representación de sus ideas matemáticas en al menos dos maneras diferentes: aritmética y gráfica; también, usó de manera didáctica un software libre para favorecer el aprendizaje.

Respecto a la quinta característica que corresponde al dominio de nociones básicas de la propuesta curricular, se debe indicar que el educador obtuvo una calificación 4, en una escala de 1 a 10 en el cuestionario que permitió categorizar a los docentes en dos grupos, él se ubica en “*Conocimiento por mejorar*”.

Para la sexta característica se relaciona con la formación continua, *el profesor W*, ha participado en capacitaciones relacionadas con la resolución de problemas en dos oportunidades en los últimos 5 años, la primera impartida por la UCR y la segunda por el Instituto de Desarrollo Profesional Uladislao Gámez Solano (IDPUGS).

Una séptima característica de este profesor, es que empleó diversas actividades y materiales durante los 80 minutos: permitió la resolución de un problema, el trabajo en grupo, la exposición y empleó un software libre para graficar.

Además, *el profesor W*, cumple con la novena característica, debido a que, demostró coherencia con la percepción del desempeño académico de los estudiantes respecto a las habilidades perseguidas y la autopercepción sobre el nivel de logro alcanzado.

La característica que no satisface es la octava relacionada con el nivel de exigencia que tenía el problema que seleccionó para desarrollar la lección, debido a que, la situación planteada poseía los elementos para ocasionar un mayor esfuerzo cognitivo en los estudiantes.

Desempeños esperados y distribución del tiempo

Se debe destacar que el *profesor W* se ubica en el grupo que debe mejorar sus conocimientos, sin embargo, logra obtener un desempeño esperado con una calificación de 10 para la lección descrita, lo anterior porque incorporó elementos del contexto en la actividad propuesta, mostró dominio del conocimiento matemático y didáctico, permitió el trabajo personal de los estudiantes y ofreció el espacio dentro de la lección para desarrollar trabajo matemático, planteó preguntas para explorar los conocimientos previos y orientar la construcción de conocimiento y evitó dar respuestas directas sobre el contenido para favorecer la reflexión por parte de los estudiantes.

Se debe señalar que, aunque el profesor no logra demostrar su conocimiento sobre los fundamentos de los programas en el instrumento aplicado, sí logra plasmar las ideas que contiene la propuesta curricular, esto se puede deber a la formación continua a la que se ha sometido y el interés por ajustarse a los lineamientos del MEP (2012).

Otro aspecto considerado fue la distribución del tiempo empleado durante las lecciones, para este caso particular fue 20% en la resolución de problemas, 30% en la pregunta dirigida, 40% en el monitoreo de los estudiantes y un 10% en labores administrativas. Estos porcentajes difieren significativamente de los datos registrados en promedio de las lecciones observadas durante esta investigación para ambos grupos de docentes, la resolución de problemas alcanzó un valor máximo de 2%, la pregunta dirigida un 8%, el monitoreo estudiantil un valor máximo de 13% y los asuntos administrativos se atendieron en un tiempo mayor, que alcanzó hasta un 21%, por tanto, queda evidenciado como el *profesor W* optimizó los 80 minutos.

Criterios de calidad de la mediación pedagógica en general y en Matemáticas

La clase narrada permite detectar indicios de la calidad de la mediación, de acuerdo con los criterios de Román (2010), las lecciones descritas fueron dinámicas (porque se desarrollaron al menos cuatro actividades distintas) y éstas permitieron atender la diversidad de manera implícita, también empleó un software de graficación como tecnología digital.

La misma autora plantea otras características de la mediación pedagógica eficaz, de las cuales en la clase del *profesor W* se encuentran: un clima de aula positivo y enriquecedor, una gestión de aula orientada a la optimización del tiempo efectivo de aprendizaje.

Además de manera implícita, se detecta una planificación de la clase la cual está centrada en los aprendizajes de los estudiantes. También, se presentó la participación activa de los estudiantes y el trabajo colaborativo, todas estas acciones son evidentes en la narración (Román, 2010).

Respecto a los criterios para determinar una gestión de aula efectiva y eficaz en relación con el desarrollo de destrezas matemáticas, la clase del profesor W presentó las siguientes: promovió el descubrimiento de las propiedades de la función cuadrática, así como la discusión sobre los resultados que se relacionaban con el problema y el uso de diversas preguntas específicas del contenido matemático para favorecer el aprendizaje (Calvo et al, 2016).

La NCTM (2015) plantea algunas características para identificar procesos de mediación eficaces, la clase descrita satisface los siguientes: metas matemáticas enfocadas en el aprendizaje (introducción de la función cuadrática) y con el uso de un problema se promovió: el razonamiento, la experimentación, la comunicación y el uso de representaciones, la cuales al ser registradas en la pizarra se convirtieron en evidencia del pensamiento de los alumnos.

Optimización de la clase

Es importante señalar que esta lección se puede optimizar, para esto se pueden considerar las siguientes ideas:

- Aumentar el nivel de complejidad del problema, algunas preguntas adicionales en el encabezado promoverían una mayor exigencia cognitiva, por tanto, la activación de los procesos matemáticos hubiera alcanzado un grado más alto al evidenciado (Ruiz, 2018).
- Estudiar la fundamentación teórica de los programas para aumentar su comprensión de la propuesta curricular y realizar un trabajo más acorde con la malla curricular.
- Incluir más preguntas durante la mediación pedagógica que favorezcan la deliberación, con el objetivo de que los estudiantes utilicen sus conocimientos, plantean y defiendan las propuestas de solución a un problema.

En síntesis, *el profesor W* realizó acciones que lo diferencian de otros docentes, entre ellas: retó a los estudiantes con un problema, les permitió el trabajo grupal y la discusión, lo que favoreció la presencia de los procesos matemáticos y además usó tecnología digital de manera pertinente, lo que acerca su clase a los criterios de calidad expuestos por Román (2010), Calvo et al (2016) y la NCTM (2015).

Es importante indicar, que el trabajo del *profesor W*, está relacionado con el Colegio 9, expuesto posteriormente, los estudiantes de esta institución fueron aquellos que

mostraron una mayor variación positiva de las calificaciones en la prueba escrita, por tanto, la labor realizada por este docente, incide en los resultados del rendimiento correspondiente. Además, la calificación en el perfil de idoneidad respectiva alcanzó un 88,9 y su debilidad se encuentra en el dominio teórico del currículo, lo que es coherente con su ubicación en el grupo de docentes con conocimiento por mejorar.

A continuación, se presentará el análisis realizado a la prueba escrita aplicada a los estudiantes participantes en esta investigación. Los datos se presentan mediante dos apartados, el primero desde una perspectiva cuantitativa vinculada con los resultados de las calificaciones de los estudiantes en general y por área, el segundo desde lo curricular, aplicando el modelo de Ruiz (2017) para valorar las tareas matemáticas incluidas en el instrumento de medición.

Análisis cuantitativo de la prueba escrita

El apartado se divide en tres partes: I aplicación, II aplicación y comparación entre ambas de acuerdo con los datos disponibles, esto para brindar un análisis particular y otro más integral, máxime que en los dos momentos no participaron la misma cantidad de estudiantes.

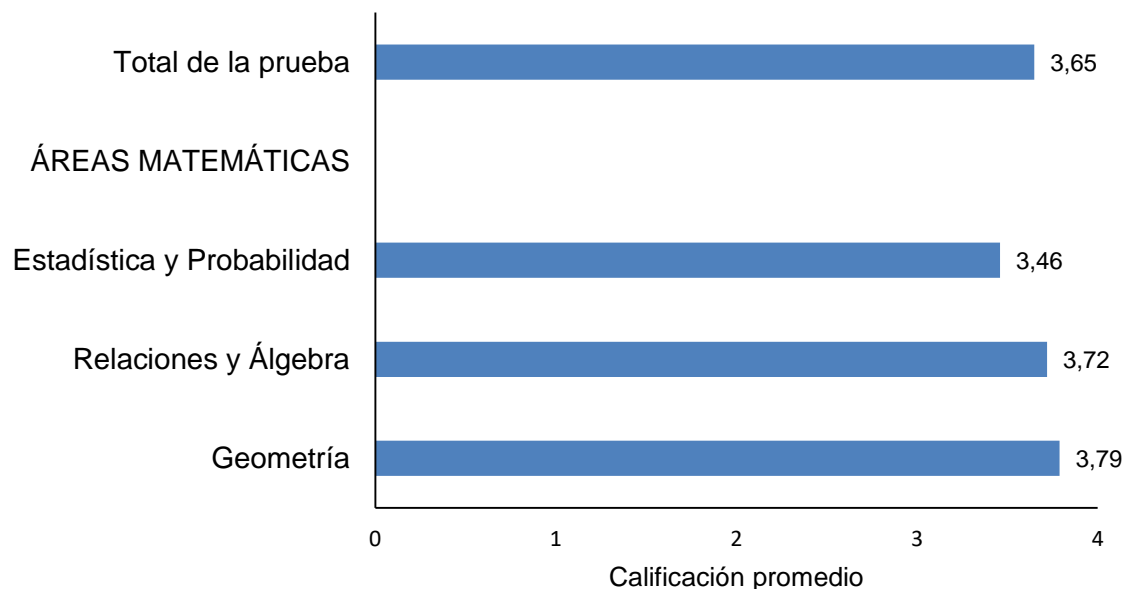
I Aplicación

Participaron 757 estudiantes de los 30 colegios públicos seleccionados, los resultados se muestran de acuerdo con el promedio general de toda la prueba y las tres áreas matemáticas evaluadas.

En el gráfico 4.7 se evidencia que en promedio los estudiantes obtuvieron una calificación inferior a 4 en una escala de 1 a 10. Este dato se puede considerar “muy bajo” sin embargo, se debe recordar que los estudiantes en el momento de realizar la prueba no tenían conocimientos sobre los contenidos evaluados, por lo cual se puede vislumbrar que los resultados obtenidos son producto de los conocimientos previos, proceso de ensayo y error, así como del azar. Además, se debe señalar que el promedio por área de conocimiento no alcanza una calificación de 4.

Gráfico 4.7

Calificación promedio obtenida por los estudiantes de colegios públicos en la primera aplicación de la prueba de conocimientos matemáticos con una escala de 1 a 10



Fuente:

Elaboración propia a partir de los datos de la primera aplicación de la prueba, 2018.

En concordancia con lo reseñado en el gráfico 4.7, se tienen los resultados de la variabilidad obtenida en la prueba y por área, esto se presenta en el cuadro 4.7.

Cuadro 4.7

Varianza obtenida para la calificación por áreas en la primera aplicación de la prueba de conocimientos matemáticos a estudiantes de colegios públicos

Prueba total	Áreas de estudio		
	Geometría	Relaciones y Álgebra	Estadística y Probabilidad
1,7	5,8	3,8	3,9

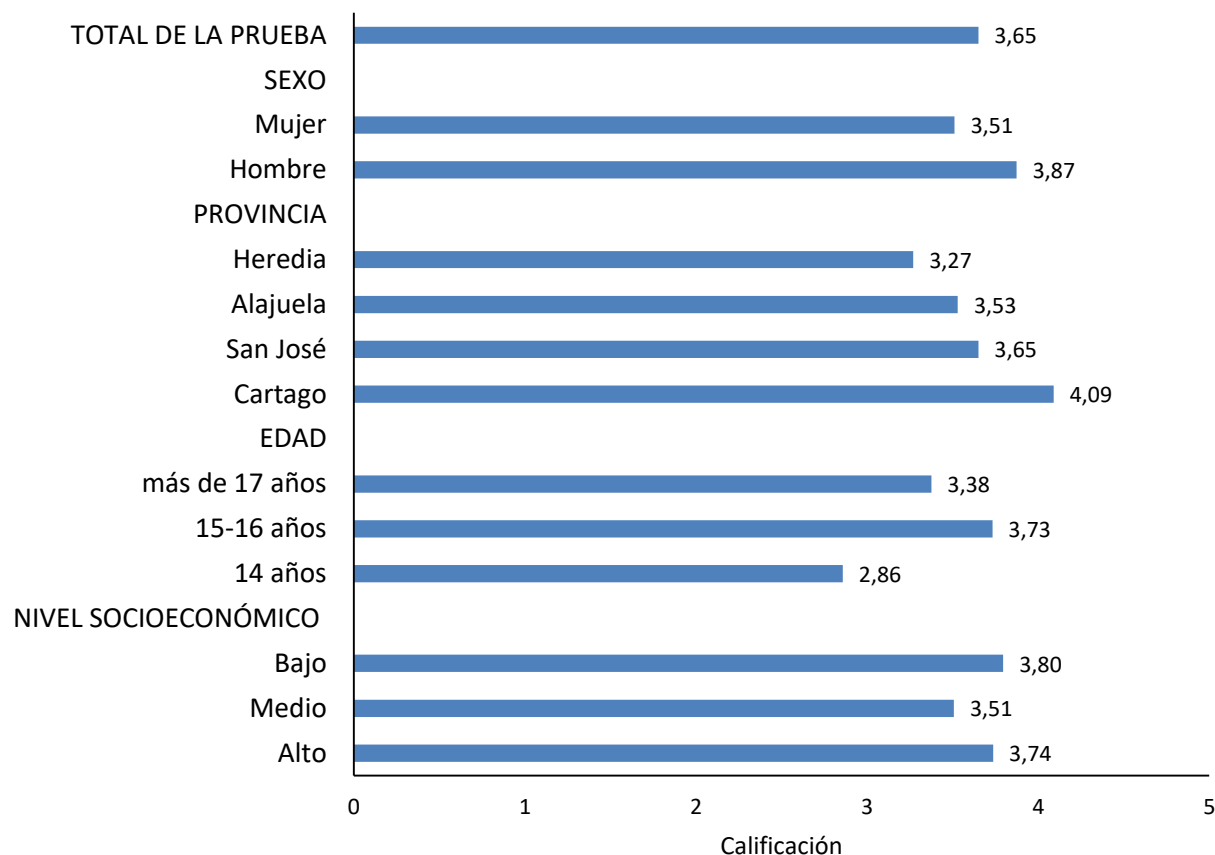
Fuente: Elaboración propia a partir de los datos de la primera aplicación de la prueba, 2018.

Se resalta el hecho que en el área de Geometría es donde se obtuvo el puntaje más alto y también donde hay mayor variabilidad. En la prueba en general se evidencia que la variabilidad es poca, lo cual habla de mayor homogeneidad de los resultados a nivel general de la prueba que por cada área, donde este valor fue mayor.

En el gráfico 4.8, se observan la calificación promedio a nivel de la prueba, caracterizada por variables sociodemográficas.

Gráfico 4.8

Calificación promedio obtenida en la prueba de conocimientos matemáticos a estudiantes de colegios públicos según variables sociodemográficas con una escala de 1 a 10.



Fuente: Elaboración propia a partir de los datos de la primera aplicación de la prueba, 2018.

*Nota: Para todas las asociaciones de variables el Eta se mantuvo en un rango de 0,10 a 0,16.

Los hechos que resaltan para todas las variables caracterizadas son que la provincia de Cartago, es donde se supera la calificación de 4.

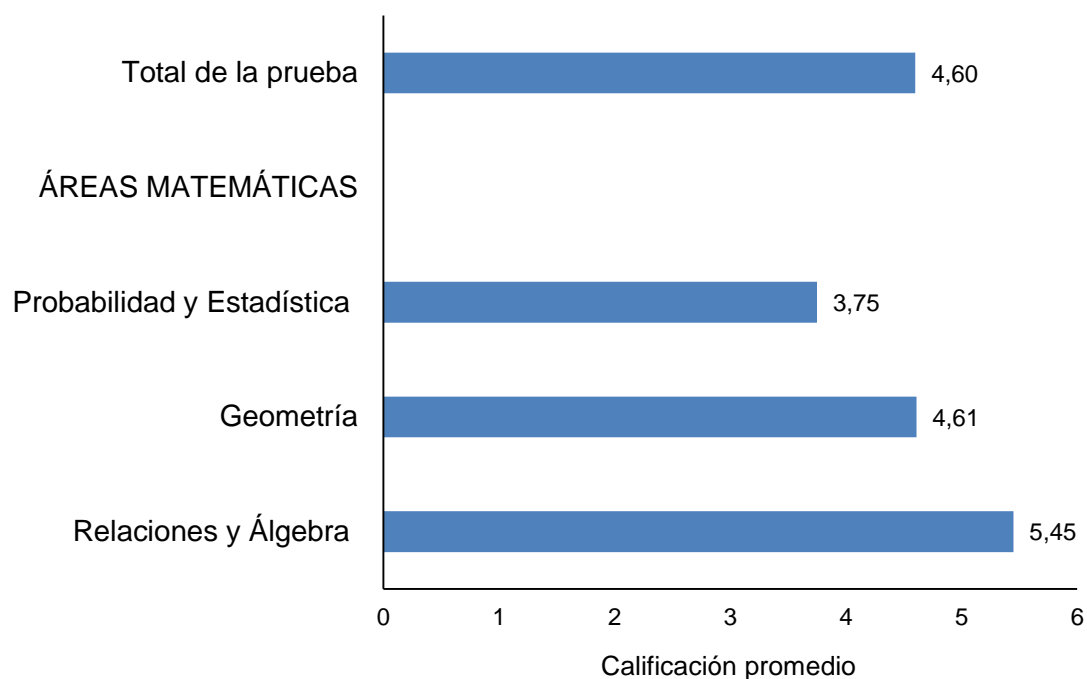
II Aplicación

Los datos que se presentan a continuación corresponden a 8 de 30 colegios, por lo tanto, se analiza únicamente la información de 146 estudiantes, que realizaron la prueba por segunda vez, lo anterior debido a que el curso lectivo tuvo un final atípico relacionado con la participación de muchos docentes en el movimiento de protesta nacional que inició en setiembre y concluyó en diciembre del 2018.

En el gráfico 4.9 se evidencia que en promedio los estudiantes obtuvieron una calificación de 4,6 en una escala de 1 a 10. Este dato se puede considerar “muy bajo” en comparación con un 7 (nota mínima de aprobación a nivel de ciclo diversificado).

Gráfico 4.9

Calificación obtenida en la segunda aplicación de la prueba de conocimientos matemáticos según áreas de estudio con una escala de 1 a 10.



Fuente: Elaboración propia a partir de los datos de la segunda aplicación de la prueba, 2018.

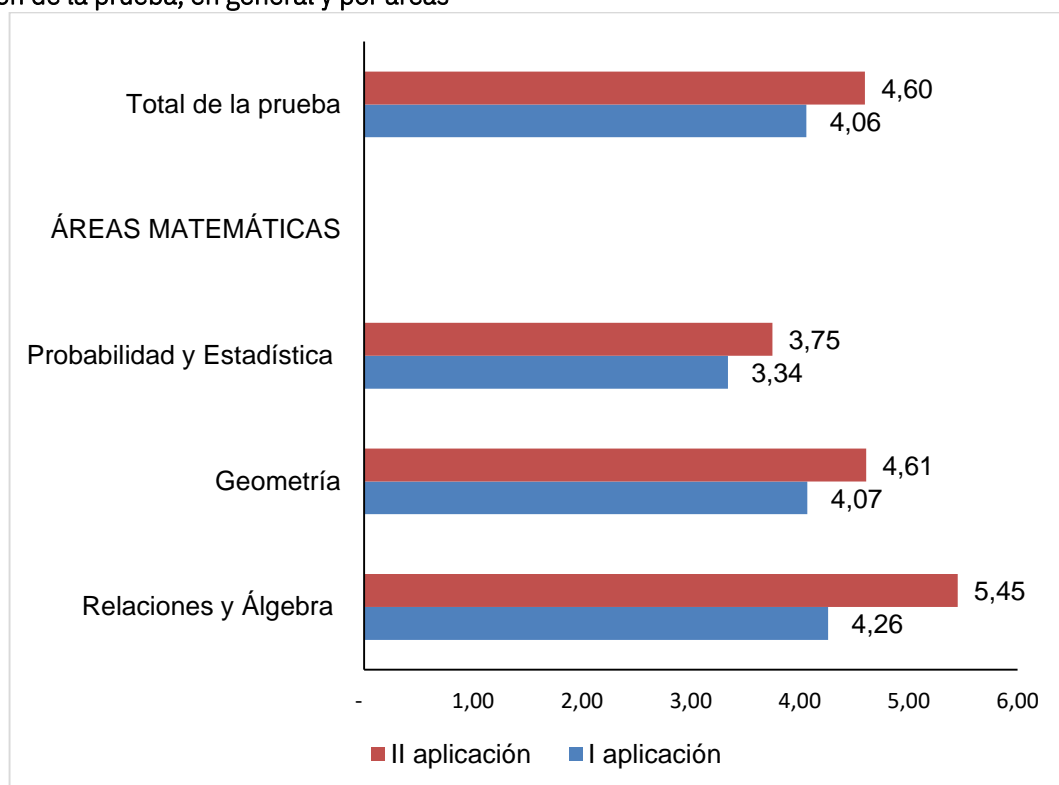
Se puede observar que en relación con el promedio total de la prueba, el área Relaciones y Álgebra es la que lo supera, mientras que Estadística y Probabilidad queda rezagada, ambas se alejan en un 0,85. Es importante indicar que la primer área se trabajó de manera normal durante el segundo periodo, mientras que en el tercero se dieron irregularidades vinculadas con el movimiento de protesta a nivel nacional, esta situación ocasionó que los temas de Estadística y Probabilidad no fueron abordados según la distribución establecida por el MEP (2012, p.465), por tanto, el comportamiento de las calificaciones obtenidas en dicha área matemática eran de esperar.

Comparación de las calificaciones obtenidas en I y II aplicación de la prueba escrita

En esta sección se presenta información que permite comparar las calificaciones en la prueba total y por áreas, obtenidas por los 146 estudiantes de la I a la II aplicación, así como un modelo de regresión con el que se intenta explicar ese cambio. Además, se incluyen las infografías que muestran, por sexo y colegio, el comportamiento de dicho cambio. También se incluyen diagramas de cajas para presentar esa diferencia según colegios, grupo de docente y grupo de creencias de los estudiantes hacia las Matemáticas.

Gráfico 4.10

Comparación de las calificaciones promedio obtenidas por los estudiantes de colegios públicos en la I y II aplicación de la prueba, en general y por áreas



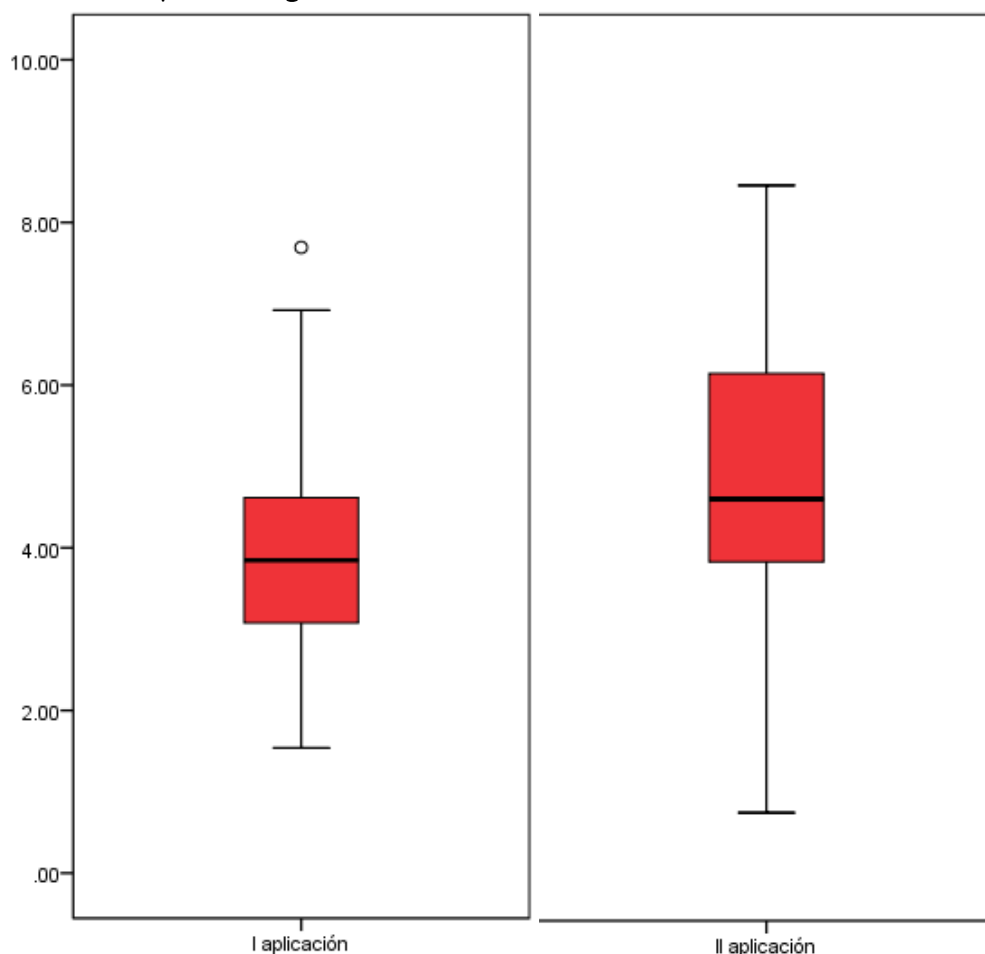
Fuente: Elaboración propia a partir de las respuestas de los estudiantes en la prueba escrita.

De acuerdo con el gráfico 4.10, en la segunda aplicación se presentó un incremento en el promedio de calificación, sin embargo, no se considera significativa porque la nota mínima de aprobación es de un 7. Esta situación es alarmante, porque la mediación pedagógica propiciada por los docentes durante siete meses, no está incidiendo en el rendimiento académico que obtienen los estudiantes, cabe señalar que la primera aplicación se ejecutó al inicio del año sin que los profesores hubiesen desarrollado los temas evaluados. Por alguna razón, los alumnos no logran evidenciar los conocimientos matemáticos que estudiaron durante el 2018, algunas suposiciones del equipo investigador son:

- Durante la mediación pedagógica, el docente empleó ejercicios que no eran similares a los utilizados en la prueba escrita.
- El tipo de ítem con que se evalúa en el aula también es diferente a los empleados en este estudio.

Gráfico 4.11

Comportamiento de las calificaciones promedio obtenidas por los estudiantes de colegios públicos en la I y II aplicación de la prueba en general



Con respecto a la segunda aplicación, en el Gráfico 4.11 se evidencia que la variabilidad es mayor, lo cual implica un rango más amplio y por ende, hubo calificaciones más altas y más bajas que en la primera aplicación. Por otra parte, de forma descriptiva se observa que el promedio de calificación aumentó en la segunda aplicación y para esta no hay presencia de valores extremos, situación que sí sucede en la primer aplicación.

El cuadro 4.8, presenta los resultados de un modelo de regresión en el cual se incluyeron las siguientes variables:

- Pre_Pos: la diferencia de la calificación obtenida en la I y II aplicación de la prueba escrita.
- Mujer: variable género comparado contra género masculino.
- Nivel_medio: nivel socio-económico medio.

- Nivel_alto: nivel socio-económico alto
- Negativos: Estudiantes con creencias negativas
- Positivos: Estudiantes con creencias positivas
- GAT: Grado académico de los tutores legales del estudiante de colegio completo y más.
- Abuelos: Tutor legal del estudiante de parentesco abuelos

Cuadro 4.8

Modelo de regresión para explicar el cambio de la calificación de la I y II prueba de estudiantes de colegios públicos²

Modelo		Coeficientes no estandarizados		Coeficientes tipificados		Sig.
		B	Error típ.	Beta	t	
1	(Constante)	4,314	,335		12,889	,000
	Pre_Pos	,812	,160	,280	5,087	,000
	MUJER	-,164	,168	-,056	-,971	,332
	NIVEL_MEDIO	-,602	,301	-,208	-1,999	,047
	NIVEL_alto	-,071	,285	-,024	-,249	,804
	negativos	,071	,185	,025	,386	,700
	positivos	,645	,247	,160	2,609	,010
	GAT	,004	,184	,001	,021	,983
	Abuelos	,506	,383	,075	1,322	,187

Fuente: Elaboración propia a partir de los resultados de la prueba escrita y el cuestionario sociodemográfico.

Con una significancia del 5%, se puede observar, de acuerdo con el modelo creado, que los estudiantes de los colegios públicos, a quienes se les aplicó en dos momentos la prueba, aumentaron en promedio la calificación de la I a la II en 0,81 puntos, en una escala de 0 a 10. Además, los estudiantes del nivel socio-económico medio disminuyeron en promedio 0,61 puntos. Los estudiantes con creencias positivas, tuvieron un aumento promedio de 0,071 puntos.

De acuerdo con la teoría, los dos ítems incluidos en el cuestionario sociodemográfico aplicado a los estudiantes, contenían elementos únicamente de dos dimensiones de las cuatro que teóricamente Gómez y Chacón (2007, p. 130) indican para las creencias hacia el aprendizaje de la matemática:

² Para el modelo propuesto se obtuvo un R² de 0,149, además de la verificación de supuestos.

- Creencias sobre el significado y la competencia en Matemáticas. Los elementos que ilustran este factor son los referidos a las creencias de auto eficacia y creencias sobre el valor de la tarea.
- Las matemáticas como un dominio de excelencia. Referidas a las creencias relativas a la orientación extrínseca de la meta relacionada con las Matemáticas y creencias de los estudiantes sobre las matemáticas y creencias sobre el aprendizaje y la resolución de problemas matemáticos más desde un punto de vista absolutista.

Es importante indicar que, por la cantidad limitada de ítems que no incluían las cuatro dimensiones, en este estudio lo que se presentan son indicios de las creencias por estudiante y no datos concluyentes. Esta situación puede explicar el comportamiento atípico de los grupos participantes, en los que se esperaba que los positivos siempre aumenten las calificaciones (Abraham et al, 2010; Gómez-Chacón, 2007).

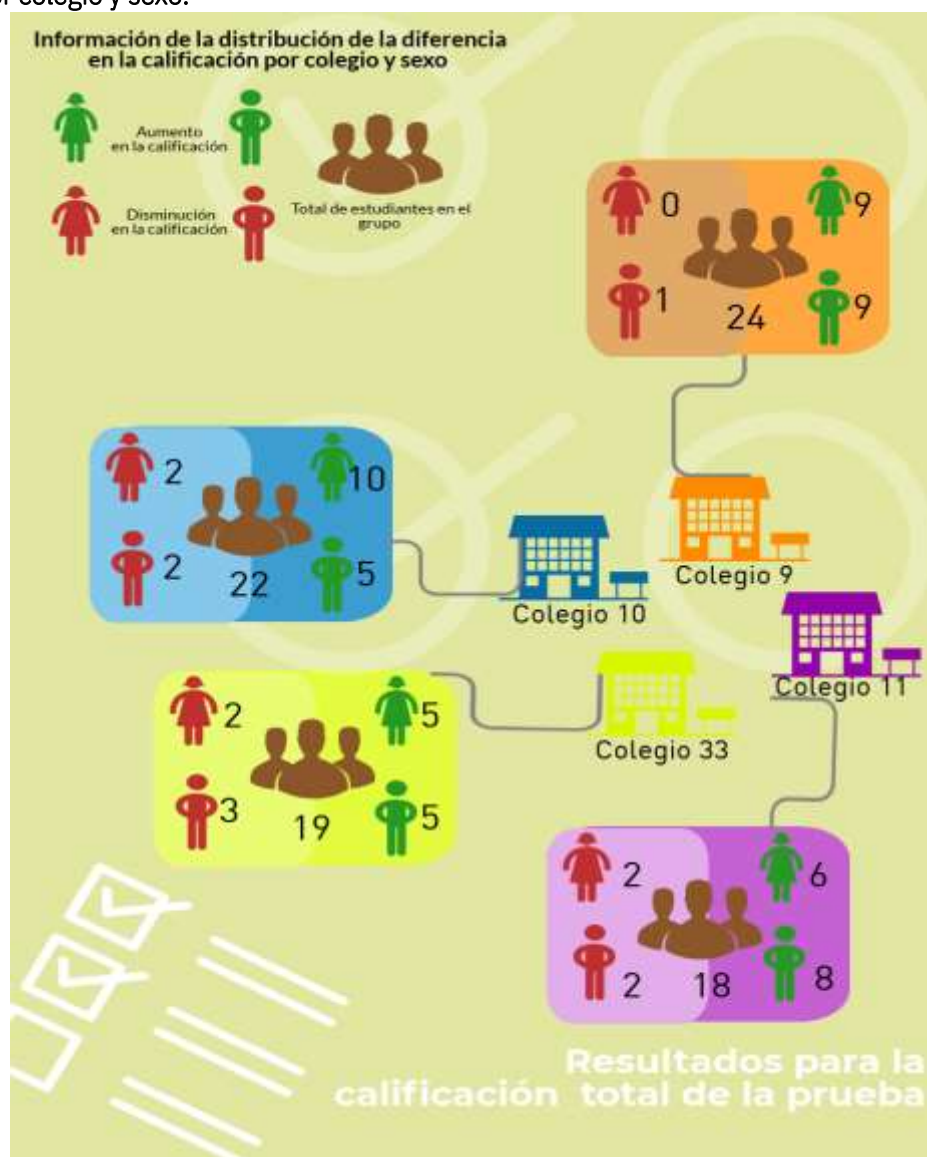
Datos comparativos entre la I y II aplicación

Debido a que la cantidad de estudiantes que realizaron la segunda aplicación de la prueba escrita, fue muy variable con respecto a la primera, el equipo investigador decide a partir del siguiente cuadro, realizar comparaciones entre grupo de creencias de los estudiantes y sus calificaciones en las dos aplicaciones de la prueba escrita y grupo de docentes (idoneidad), únicamente en las instituciones públicas donde el número de estudiantes no disminuyó en más de cuatro en ambas aplicaciones (Ver Anexo 11).

Seguidamente, se presentan infografías para ilustrar los datos, se debe tener en cuenta que para obtener la cantidad de estudiantes que mantuvieron la calificación de una prueba a otra, se calcula restándole al total del grupo todos los individuos rojos y verdes (Ver Anexo 12).

Figura 4.4

Distribución de los estudiantes de colegios públicos según la diferencia en la calificación de la I a la II aplicación, por colegio y sexo.

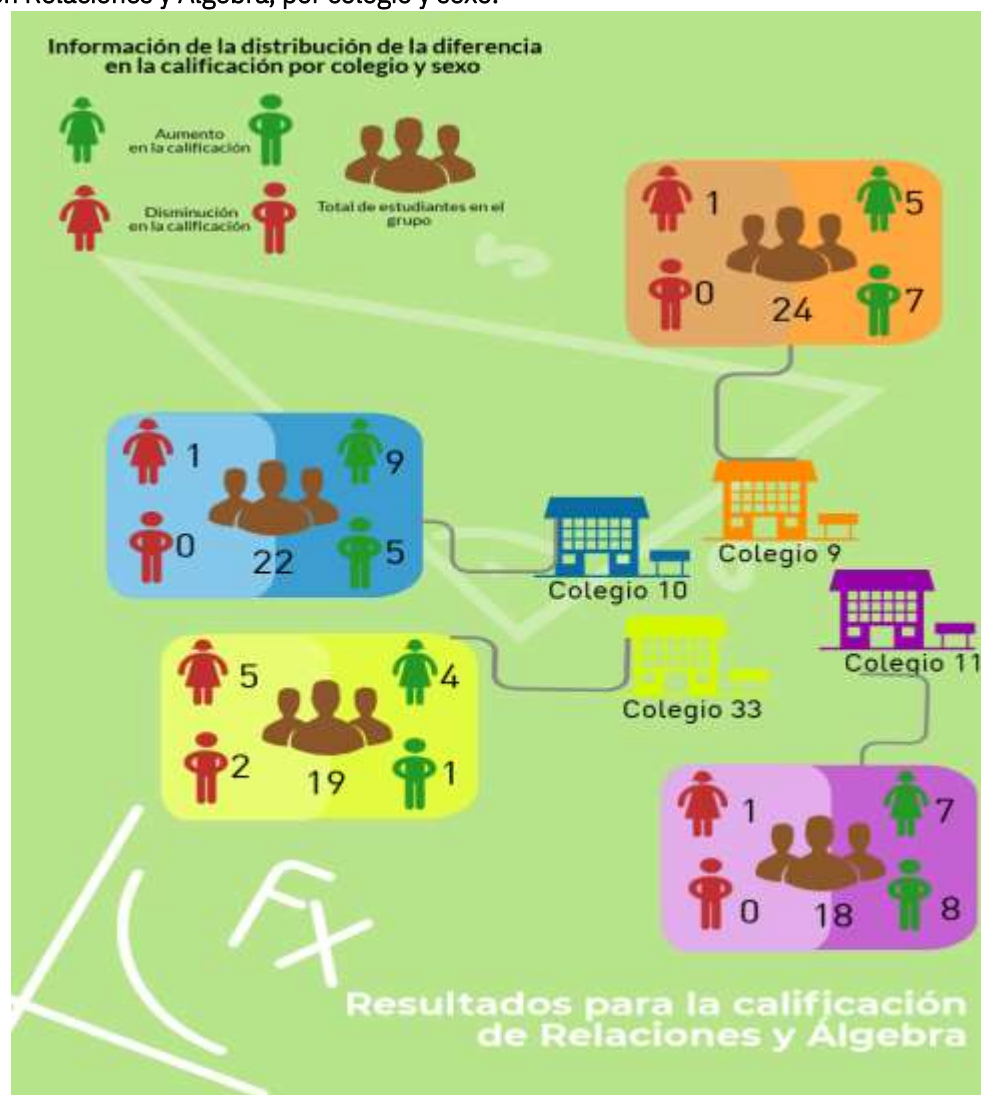


Fuente: Elaboración propia a partir de los resultados de la prueba escrita y el cuestionario sociodemográfico.

Se puede visualizar que la cantidad de estudiantes que bajaron la calificación en la prueba, es menor a la cantidad que subió, además la distribución por sexo es similar tanto para los que bajaron como para los que aumentaron. Otro aspecto importante, es que la cantidad de estudiantes que se mantuvieron de una aplicación a la otra, es menor que los que mostraron algún movimiento, por ejemplo, en el colegio 9, aumentaron la calificación 18, lo cual representa las tres cuartas partes del grupo, solo 1 hombre disminuyó, lo cual implica que 5 estudiantes no mejoraron ni empeoraron, este número es similar en los colegios 33 y 10.

Figura 4.5

Distribución de los estudiantes de colegios públicos según la diferencia en la calificación de la I a la II aplicación en Relaciones y Álgebra, por colegio y sexo.



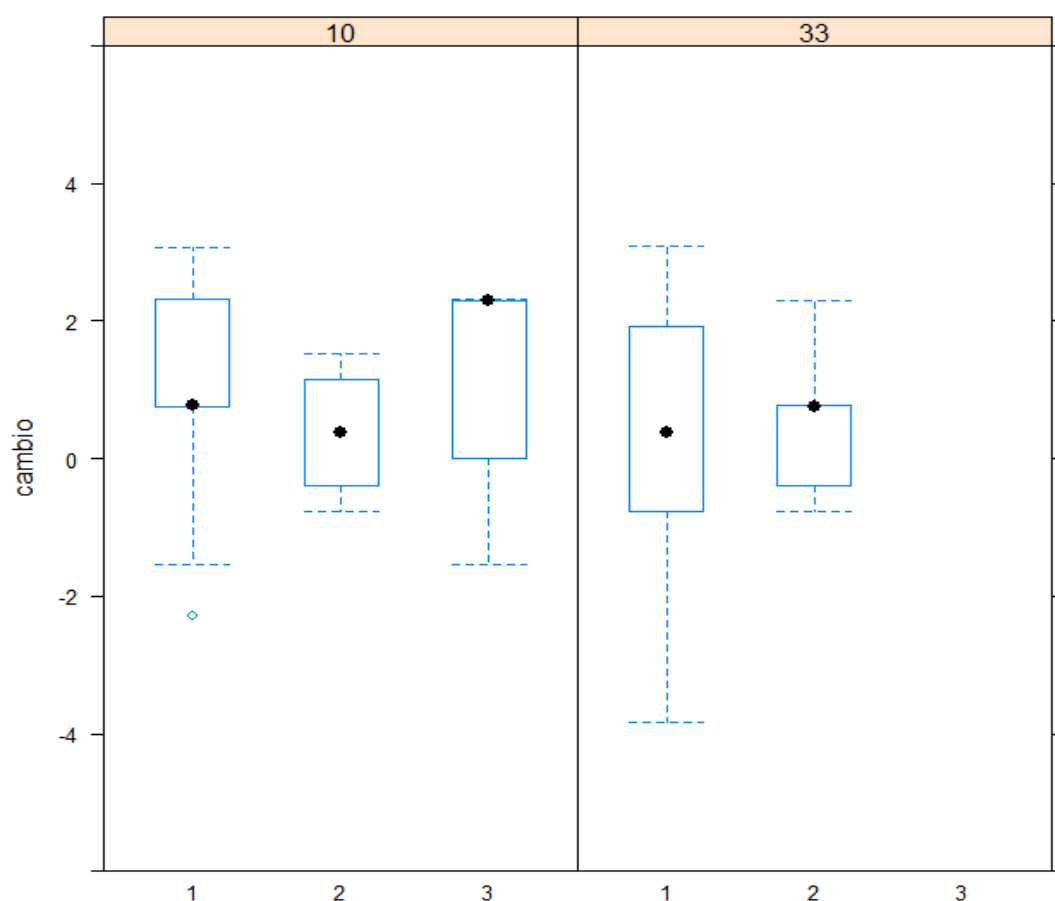
Fuente: Elaboración propia a partir de los resultados de la prueba escrita y el cuestionario sociodemográfico.

De acuerdo con la figura 4.5, se puede visualizar que fueron más mujeres que hombres las que bajaron la calificación en el área de Relaciones y Álgebra, no obstante, al igual que en la nota total de la prueba, son más los estudiantes que subieron que los que bajaron o se mantuvieron. Sin embargo, se evidencia que en el colegio 33 hay una diferencia sustancial por sexo y hay un mayor número de estudiantes que mantuvieron su nota en comparación con el promedio de la prueba, lo que puede significar que su conocimiento

en el área Relaciones y Álgebra fue similar al inicio del curso lectivo y siete meses después.

Gráfico 4.12

Diagramas de cajas según colegios, tipos de creencias hacia el aprendizaje de la Matemáticas, diferencia en I y II aplicación de la prueba y docente con conocimientos aceptables de los programas oficiales.

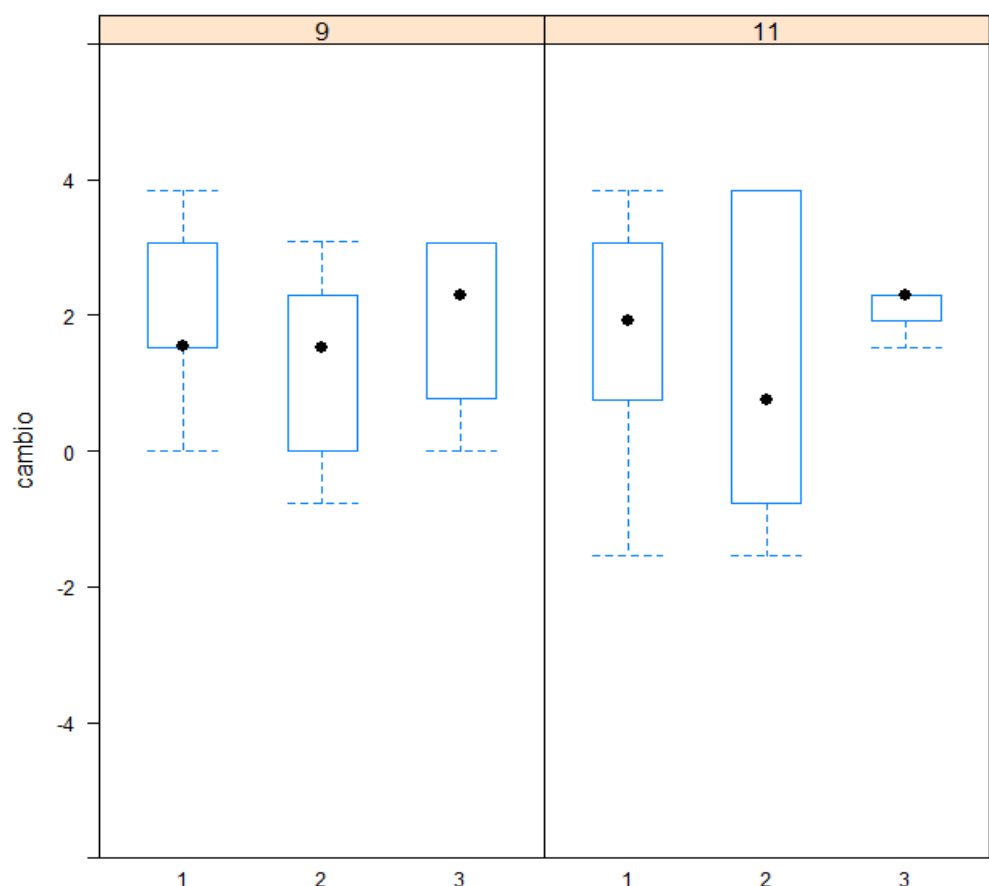


Fuente: Elaboración propia a partir de la caracterización de los estudiantes, docentes de colegios públicos, resultados de la I y II aplicación de la prueba escrita.

Se debe recordar que los docentes que trabajaron con estos estudiantes se encuentran en la categoría de “Conocimientos aceptables”, el promedio está por encima o cercano al 0, es decir, los dos colegios se mantuvieron o mejoraron en promedio, en los tres grupos de estudiantes positivos, negativos y ambivalentes. Sin embargo, en ambos colegios se ve que el grupo de los negativos tiene más variabilidad con respecto a los otros dos, esencialmente tienden a disminuir su calificación de la primera a la segunda aplicación. El ambivalente presenta en los dos casos un rango reducido, el positivo no presenta ningún patrón.

Gráfico 4.13

Diagramas de cajas comparativos según colegios, tipos de creencias hacia el aprendizaje de la Matemáticas, la diferencia en I y II aplicación de la prueba y docente con conocimientos por mejorar de los programas oficiales.



Fuente: Elaboración propia a partir de la caracterización de los estudiantes, docentes de colegios públicos, resultados de la I y II aplicación de la prueba escrita.

En ambos casos el promedio está por encima de 0, hay presencia de los tres grupos de estudiantes (negativos, ambivalentes y positivos), además en general los dos colegios coinciden en tener poca variabilidad y tienden a aumentar la calificación de la I a la II aplicación. En el Anexo 14 se detalla la información con que se generaron los gráficos 4.12 y 4.13.

Dado que el colegio 33 muestra los datos menos favorables y el 9 evidencia una tendencia más cercana a lo esperado por el equipo investigador, se presenta más detalladamente la diferencia en la calificación tomando en cuenta el grupo de creencias al que pertenece cada estudiante.

Cuadro 4.9

Distribución de estudiantes del colegio 33 según el grupo de creencias al que pertenece y diferencia en la calificación obtenida en la I y II aplicación de la prueba de conocimientos matemáticos.

Estudiante	creencias	
	Negativas	Ambivalentes
1	-3,84	
2		,76
3		-,77
4		,77
5		0,00
6	2,31	
7	-1,53	
8	1,54	
9	,77	
10	0,00	
11	,76	
12	-2,31	
13	0,00	
14	2,31	
15	3,08	
16		-,77
17		,77
18		2,30
19	0,00	
Total	12	7

Fuente: Elaboración propia a partir de los resultados de la prueba escrita y el cuestionario sociodemográfico

Se evidencia que en este colegio no hay presencia de estudiantes con creencias positivas.

Cuadro 4.10

Distribución de estudiantes del colegio 9 según el grupo de creencias al que pertenece y diferencia en la calificación obtenida en la I y II aplicación de la prueba de conocimientos matemáticos.

Estudiante	Creencias		
	Negativas	Ambivalentes	Positivas
1		1,54	
2	2,31		
3	3,84		
4	3,08		
5		1,53	
6			2,30
7			3,07
8		-,77	
9		0,00	
10		0,00	
11	1,53		
12		1,53	
13			3,07
14		2,30	
15	0,00		
16			,77
17		1,53	
18	1,53		
19	0,00		
20	3,07		
21			0,00
22	1,54		
23		2,30	
24		3,08	
Total	9	10	5

Fuente: Elaboración propia a partir de los resultados de la prueba escrita y el cuestionario sociodemográfico.

Después de concluido el análisis cuantitativo de la prueba escrita, se evidencia la coherencia con los resultados cualitativos encontrados, debido a que, el profesor W es el encargado del colegio 9 y ha marcado diferencia con respecto a los otros, tanto en sus características de idoneidad como en el rendimiento de sus estudiantes en la prueba escrita.

Otros datos revelan que los colegios 9, 16 y 18 tuvo un estudiante que aumentó el máximo promedio 3,84 en la prueba total, mientras que en el colegio 16 y 33 hubo un estudiante con el mínimo promedio 3,84, es decir, el colegio 16 presentó los dos extremos.

Análisis curricular de la prueba escrita

Se procedió a realizar un análisis curricular de la prueba escrita aplicada a los estudiantes, con el fin de establecer un parámetro de concordancia entre la fundamentación teórica de los programas de Matemáticas y los 14 ítems distribuidos de la siguiente manera: 4 de Geometría, 6 de Relaciones y Álgebra, 4 de Estadística y Probabilidad.

Debido a que la modificación curricular en Matemáticas (MEP, 2012), no consistió únicamente en la readecuación de contenidos, fue necesario utilizar para este análisis la *Estrategia “4+6”* de Ruiz (2017) detallada en el marco teórico de este documento, la cual permite establecer la concordancia de la prueba escrita con los programas oficiales desde una perspectiva teórica-conceptual que incluye varios aspectos: correspondencia con las habilidades generales y específicas, enfoque de cada área, presencia de contextualización activa, intervención de los procesos matemáticos y la clasificación por nivel de complejidad.

Es necesario aclarar qué se entiende por los dos términos siguientes, para favorecer la comprensión del análisis por área matemática que se presenta en el cuadro 4.11.

- Integración de habilidades, consiste en plantear problemas que involucran en su proceso de resolución dos o más habilidades de una o varias áreas matemáticas.
- Uso de la contextualización activa, consiste en determinar el tipo de contexto real o matemático. Para el primero, se establecen tres categorías:
 - *activo*: es verosímil, reta al estudiante y forma parte de la solución
 - *accesorio*: es posible prescindir de este y el ítem se resolvería de la misma manera
 - *artificial*: no refleja componentes de situaciones de la realidad, es poco verosímil

Cuadro 4.11
Análisis curricular realizado a la prueba escrita por área matemática

Aspecto	Geometría	Relaciones y Álgebra	Estadística y Probabilidad
Correspondencia entre las habilidades generales y específicas identificadas en el ítem.	4	6	3
Concordancia con el enfoque curricular y perspectiva del área matemática.	Media: 2 ítems Baja: 2 ítems	Alta: 2 ítems Media: 4 ítems	Baja: 4 ítems
Ítems con uso de la contextualización activa.	0	3	0
Nivel de complejidad identificado (Ruiz, 2017).	Todos los ítems corresponden a reproducción		
Ítems con errores de construcción o conceptuales.	2	0	1

Fuente: Análisis de la prueba escrita (Mena, 2018)

Respecto a la correspondencia entre las habilidades generales y específicas identificadas por área, se tiene que:

- En Geometría no se toma en cuenta la integración de la habilidad general con sus correspondientes habilidades específicas, debido a que se ven como elementos separados; incluso hay un divorcio entre los conocimientos y las habilidades.
- En Relaciones y Álgebra se presentaron ítems que correspondían al currículo anterior (MEP, 2005a; 2005b) por tanto, no fue posible establecer una relación coherente con la malla curricular del 2012.
- En Estadística y Probabilidad se priorizó el cálculo de medidas sin la interpretación de estos resultados para responder a las situaciones planteadas en los ítems. Es importante señalar que uno de los ítems, no evidenció correspondencia entre las habilidades generales y específicas identificadas.

De los resultados más destacados se encuentra que todos los ítems son considerados de reproducción (requieren la solución de manera muy directa, mediante la aplicación de un solo procedimiento que debe ser familiar para el estudiante), con una concordancia que tiende hacia la media y baja con el enfoque curricular por área matemática y con solamente tres enunciados contextualizados. Indistintamente del propósito con el que se seleccionaron, lo recomendable hubiese sido un equilibrio entre el uso de enunciados con contextos reales (activos) y matemáticos, así como una mayor coherencia con el enfoque curricular del área.

A continuación, se presenta la distribución de los ítems respecto a las habilidades generales incluidas en los programas de estudio para cada una de las áreas evaluadas.

Cuadro 4.12

Distribución de ítems respecto a las habilidades generales del área de Geometría

Habilidad General	Ítem (número)
1. Representar las circunferencias de manera analítica y gráfica.	No hay
2. Analizar relaciones de posición relativa entre rectas y circunferencias.	No hay
3. Utilizar la geometría analítica para representar circunferencias y transformaciones.	No hay
4. Calcular áreas y perímetros de polígonos.	1,2,3,4
5. Identificar simetrías.	No hay
6. Aplicar e identificar diversas transformaciones en el plano a figuras geométricas.	No hay
7. Visualizar y aplicar características y propiedades de figuras geométricas tridimensionales.	No hay

Fuente: Análisis de la prueba escrita (Mena, 2018).

Cuadro 4.13

Distribución de ítems respecto a las habilidades generales del área de Relaciones y Álgebra.

Habilidad General	Ítem (número)
1. Utilizar elementos del lenguaje de los conjuntos numéricos para representar dominio y rango de funciones, así como el conjunto solución de ecuaciones.	7
2. Aplicar el concepto de función en diversas situaciones.	5,6
3. Utilizar distintas representaciones de algunas funciones algebraicas y trascendentes.	7, 8,9
4. Plantear y resolver problemas a partir de una situación dada.	10
5. Determinar el modelo matemático que se adapta mejor a una situación dada.	No hay

Fuente: Análisis de la prueba escrita (Mena, 2018).

Cuadro 4.14

Distribución de ítems respecto a las habilidades generales del área de Estadística y Probabilidad.

Habilidad General	Ítem (número)
1. Utilizar las medidas de posición para resumir y analizar la información proveniente de un grupo de datos cuantitativos.	11,12
2. Utilizar las principales medidas de variabilidad para evaluar y comparar la dispersión de los datos.	No hay
3. Utilizar diferentes representaciones para analizar la posición y variabilidad de un conjunto de datos.	No hay
4. Analizar la importancia del uso de medidas de tendencia central y variabilidad dentro de los análisis comparativos de información.	No hay
5. Emplear las propiedades básicas de la probabilidad en situaciones concretas.	No hay
6. Utiliza las probabilidades y las medidas estadísticas para favorecer la toma de decisiones en condiciones de incertidumbre.	13,14
7. Resolver problemas vinculados con el análisis de datos y el manejo de la aleatoriedad dentro del contexto estudiantil.	No hay

Fuente: Análisis de la prueba escrita (Mena, 2018).

En el cuadro 4.12 se puede observar que para el área de Geometría solamente hay cuatro ítems y todos están involucrados con una de las siete habilidades generales propuestas. En el cuadro 4.13, se muestra que cuatro de las seis habilidades generales de Relaciones y Álgebra son empleadas para generar seis ítems. Respecto a Estadística y Probabilidad, el cuadro 4.14 muestra que se evaluaron dos de siete habilidades generales mediante cuatro ítems.

Aun cuando la prueba poseía únicamente 14 ítems, la distribución se puede considerar apropiada, sin embargo, no fue equilibrada de acuerdo con las habilidades generales de cada área, brindando información parcial sobre los conocimientos de los estudiantes. Por ejemplo, en Geometría se excluyó circunferencia, transformaciones y visualización espacial, la evaluación consideró únicamente polígonos, por lo que, limitó la posibilidad de los estudiantes de demostrar sus conocimientos previos o adquiridos en dicha área sobre los tópicos no incluidos.

Contextualización activa y nivel de complejidad en términos generales

La prueba contiene ítems en las tres áreas que requieren la aplicación de propiedades o procedimientos memorísticos, sin presencia de problemas con contexto real, esto hace que las demandas cognitivas por parte de los estudiantes sean débiles y no se favorece la activación de los procesos matemáticos. Es importante recordar que por solicitud del equipo técnico del Estado de la Educación, la prueba solicitada debía contener ítems de fácil resolución.

Respecto a la contextualización activa (si el tipo de contexto es real o matemático) en Geometría está ausente y es artificial (no refleja componentes de situaciones de la realidad, es poco verosímil) en Relaciones y Álgebra. A continuación, se presenta un conjunto de datos que muestran de manera general cuál fue la presencia de la contextualización activa.

Cuadro 4.15
Presencia de Contextualización activa en los ítems

Contexto	Cantidad de ítems
Activo	0
Artificial o accesorio	5
Matemático	9
Total	14

Fuente: Análisis de la prueba escrita (Mena, 2018).

En el cuadro 4.15 se puede apreciar que el contexto matemático fue privilegiado, estos datos deben llamar a la reflexión debido a que se sigue promoviendo a través de la macroevaluación unas Matemáticas descontextualizadas que solicitan al estudiantado aplicar propiedades o procedimientos memorísticos, sin establecer una asociación con la utilidad de estas en la realidad. Además, se debe reflexionar sobre los contextos artificiales o accesorios, los cuales no favorecen la competencia matemática.

Seguidamente, se presenta la distribución de ítems por nivel de complejidad.

Cuadro 4.16.
Niveles de complejidad en los ítems

Nivel de complejidad	Cantidad de ítems
Reproducción	13
Conexión	1
Reflexión	0
Total	14

Fuente: Análisis de la prueba escrita (Mena, 2018).

En el cuadro 4.16 se visualiza que el nivel de complejidad predominante fue Reproducción, a pesar de esto la calificación promedio de los estudiantes no superó el 4 en una escala de 1 a 10. Se debe indicar que solo hubo un ítem de conexión (el problema no es rutinario, implica interpretación, diversas representaciones y vínculos con otros elementos) y ninguno de reflexión (la solución requiere formular, argumentar, justificar, generalizar y chequear resultados de acuerdo con el problema planteado).

Es importante señalar que el punto teórico de partida para establecer una distribución apropiada en la prueba escrita por niveles de complejidad, está en estrecha relación con el diseño de las tareas que conformen un ítem y la valoración de la intervención de los procesos en el desarrollo de la solución de este. Si se establece el papel preciso de dicha intervención, se facilitará la selección de los ítems, con lo que se garantizará la existencia de los diversos niveles de complejidad y exigencia cognitiva en cualquier tipo de prueba (Ruiz, 2017). El análisis curricular completo de la prueba se puede ubicar en el Anexo 13.

En síntesis, lo que se observó en las aulas, es la forma tradicional en que se ha impartido Matemáticas -en la mayoría de lecciones observadas no se implementa la propuesta curricular del MEP (2012)- y la evaluación sumativa también es la tradicional, por tanto, se puede indicar que existe una relación coherente entre lo observado y lo evaluado, sin embargo, los resultados son deficientes. Esto quiere decir que la mediación pedagógica no está impactando en los aprendizajes de los estudiantes evaluados, debido a que las

calificaciones de las pruebas demuestran muy leve mejoría, sin lograr alcanzar o acercarse al mínimo establecido.

Por tanto, la aproximación realizada permite indicar que la calidad de la mediación pedagógica en Matemáticas, debe mejorar debido a que, en el rol del docente se determinaron aspectos por corregir como: su desempeño en el aula y nivel de conocimiento de los programas, además, se determinó que hay debilidades respecto a los criterios de calidad de la mediación en términos generales y específicos de la asignatura, entre ellas: uso de tecnologías digitales, diversidad de actividades que favorezcan la interacción, así como los procesos matemáticos. Asimismo, respecto a la evaluación de los aprendizajes en los estudiantes que se sometieron a ambas aplicaciones, se concluye que la mediación pedagógica no está cumpliendo con dotar a los estudiantes de las herramientas necesarias para enfrentar una prueba tradicional y deja la incógnita de ¿cuánto más lejos estará esa mediación de una prueba escrita que si refleje la propuesta curricular?

Información de colegios privados

Esta sección se desarrolla de manera similar a la de los resultados correspondientes a colegios públicos, por tanto, se presenta información de los docentes y de los estudiantes, en cuanto a características propias, al tipo y tiempo que dedican a las actividades que realizan durante la clase, el material didáctico con que trabajan en el aula. Además, se describen los desempeños esperados y los procesos matemáticos propiciados por los educadores.

Seguidamente, se presenta el detalle del análisis de la información respectiva.

Docentes

Tomando como punto de partida la caracterización que se realizó para los docentes de colegios públicos, se determina que los profesores de instituciones privadas se distribuyen como se presenta en el cuadro 4.17.

Cuadro 4.17

Distribución de docentes de colegios privados por variables sociodemográficas, condiciones de trabajo y formación docente

Sociodemográficas	Cantidad	Condiciones de trabajo	Cantidad	Formación docente	Cantidad
Género		Lecciones laboradas		Formación continua en 5 años	
Femenino	1	Menos de 20	1	Con capacitación	2
Masculino	4	De 20 a 25	2	Sin capacitación	3
		De 36 a 40	1		
		De 46 a 48	1		
Edad					
De 20 a 29 años	1				
De 30 a 39 años	1				
De 40 a 49 años	3				
Estudios superiores					
Bachillerato	2				
Licenciatura	3				

Fuente: Elaboración propia a partir de los datos brindados por los docentes participantes a través del cuestionario, 2018.

Se trabajó con un grupo de docentes en el que predomina el género masculino. La modalidad de contratación de los colegios privados no es similar a la del público, debido a que los periodos laborales tienen caducidad anual, por lo que no se clasifican en interino o propiedad ni se categorizan salarialmente.

Los cinco participantes obtuvieron una calificación entre 4 y 6 (en una escala de 1 a 10) en el instrumento empleado para comprobar el conocimiento de los docentes sobre los fundamentos de los programas oficiales, por tanto, el análisis que se presenta no ubica a los educadores por grupos como se realizó para colegios públicos.

Cabe señalar que los colegios privados deben desarrollar como mínimo las habilidades de los programas oficiales, pues algunos cuentan con malla curricular propia. Estas instituciones no han estado incluidas en los procesos de formación docente propiciados por el MEP, por lo que el conocimiento que poseen en relación con la fundamentación teórica de la propuesta vigente, la obtuvieron al menos dos de ellos, en un determinado momento, por la Asociación de Centros Educativos Privados o la UCR.

Respecto a las preguntas vinculadas con los fundamentos de los programas y los niveles de complejidad de los problemas, únicamente 1 docente acertó la respuesta. Al consultar sobre la orientación del currículo 4 indicaron correctamente que es por habilidades y 3 de 5 identificaron los cuatro momentos para la organización de la lección y los cinco procesos.

Todos los docentes que laboran en estas instituciones obtuvieron el bachillerato en universidades públicas y aquellos que tienen licenciatura (3 de 5) fue adquirida en universidades públicas y privadas. Se destaca que ninguno posee un grado académico superior u otra titulación.

Retomando la cantidad total de siete docentes bachilleres en públicos y privados participantes en el estudio, se encuentran dos laborando en el sector privado.

Estudiantes

El conocimiento, por parte del docente, de algunas características de los estudiantes como creencias hacia el aprendizaje de las Matemáticas, estrato socioeconómico, nivel educativo de los tutores legales, horas de estudio, acceso a tutorías, repitencia, entre otros, son aspectos relevantes para lograr una mediación pedagógica eficaz como lo plantean Román (2010) y Calvo et al (2016). Por tal razón, se presenta la clasificación de los estudiantes participantes, tomando en cuenta las mismas características con las que se realizó la de colegios públicos, sin embargo, sí fue posible determinar la calificación promedio en la prueba de habilidades matemáticas, por grupo de creencias y género, debido a que todas las secciones participantes realizaron las dos aplicaciones.

Se destaca que los alumnos de los colegios privados tienen clase social igual o superior a medio y están distribuidos en los siguientes grupos:

Grupo 1: Estudiantes con creencias positivas

Los integrantes se caracterizan por evidenciar sentimientos o emociones positivas y optimistas tanto antes como después de realizar un examen. Este grupo está representado por 16 personas (10 hombres y 6 mujeres) y cumplen con condiciones de aprendizaje ideales (dedican horas de estudio, no reciben tutorías y no repiten Matemáticas de décimo año), lo cual viene acompañado de padres o tutores legales con un nivel educativo casi en su totalidad de grado universitario (15 personas). Además, en la prueba de habilidades matemáticas, estos alumnos obtuvieron una calificación promedio de 4,71 (los hombres de 5,14 y mujeres de 4,29)

Grupo 2: Estudiantes con creencias ambivalentes

Los individuos se distinguen por mostrar sentimientos de frustración educativa antes de un examen y la situación contraria después de realizado o viceversa. Este grupo lo componen 26 personas (16 hombres y 10 mujeres), 14 personas cumplen con condiciones de aprendizaje ideales de aprendizaje (9 mujeres) y el nivel educativo de sus padres o tutores legales oscila entre colegio completo y nivel universitario. Este grupo obtuvo una calificación promedio de 3.78 (los hombres de 3,71 y mujeres de 3,86)

Grupo 3: Estudiantes con creencias negativas

Las personas se caracterizan por presentar sentimientos de frustración o desmotivación antes y después de realizar un examen. Este grupo lo conforman 31 personas (11 hombres y 20 mujeres) predomina el cumplir solo una de las 3 condiciones de aprendizaje ideales. Por otra parte, sus padres o tutores legales no se agrupan de acuerdo con un grado académico específico, sino que se distribuyen desde primaria completa hasta el grado universitario. La calificación promedio obtenida por este grupo es de 3,78 (los hombres de 3,38 y mujeres de 4,04).

Se destaca que el grupo con menor cantidad de estudiantes es aquel que presenta únicamente creencias positivas, ellos representan un 22% de la totalidad de los alumnos de los colegios privados participantes. El restante 78% oscila en sus creencias o se inclina hacia las negativas.

Se procede a detallar los hallazgos relacionados con la mediación pedagógica de acuerdo con los elementos observados durante las lecciones.

Mediación pedagógica

En esta sección se aproximará la mediación pedagógica a partir de los actores involucrados: el docente y los estudiantes. Respecto a los primeros, se determina la calificación de su desempeño en las clases, la distribución del tiempo en cuanto a las diversas actividades y materiales didácticos empleados, además se identifican los procesos matemáticos propiciados. De los segundos se indica la distribución del tiempo en los mismos aspectos que en los primeros.

Desempeños esperados del docente

Durante las observaciones de clase, se registró el desempeño de los docentes para generar una calificación que consideraba elementos vinculados con el conocimiento del contenido, de la didáctica (a través de un indicador cada uno). Además, la mediación pedagógica se valoraba a partir de los siguientes descriptores:

- Presencia del contexto en las actividades propuestas para la enseñanza.
- Favorecimiento del trabajo de los estudiantes para realizar las tareas matemáticas.
- Planteamiento de preguntas para indagar los conocimientos previos, favorecer la construcción del conocimiento u orientar el trabajo de los estudiantes.

En el cuadro 4.18 se presentan las calificaciones promedio.

Cuadro 4.18

Desempeño esperado del docente de colegio privado según número de observación

	Promedio	Desviación estándar
Observación 1	5.14	2.00
Observación 2	5.68	2.83
Desempeño promedio	5.41	2.21

Fuente: Elaboración propia a partir de los datos de la observación de prácticas de aula, 2018.

De acuerdo al cuadro 4.18 se puede observar que la calificación promedio en general obtenida por los docentes es superior a 5 en una escala de 1 a 10, con una desviación media de 2,21 lo que implicó calificaciones que oscilan entre 3,2 y 7,62 en promedio, los datos revelan que 4 de 5 no alcanzaron un 8.

En la segunda observación, se obtuvieron calificaciones mayores que en la primera, lo que se puede deber a que algunos docentes hicieron algunos cambios en la mediación pedagógica porque iban a ser observados nuevamente.

Estos datos son coherentes con las actividades propiciadas por el docente, las realizadas por los estudiantes, el tipo de material y estrategias metodológicas observadas que se mostrarán más adelante, porque evidencian el desarrollo de clases que no son coherentes con la propuesta del MEP (2012).

Tiempo en actividades y uso de material didáctico por parte del docente

Otro elemento importante en la mediación pedagógica es la distribución del tiempo que el docente hace, de acuerdo con la diversidad de actividades y materiales didácticos que se emplean para el desarrollo de la clase.

La información que se presenta con respecto a la distribución del tiempo de las actividades se hace de dos maneras:

- Estructura general de una clase dividida en tres categorías: actividades de aprendizaje (azul), sin relación con el aprendizaje (rojo) y de gestión (verde).
- Listado de actividades según las categorías anteriores.

Cuadro 4.19

Tiempo promedio utilizado por el docente de colegio privado según la categoría de actividad que desarrolla en la clase

Actividades	Porcentaje promedio
Relacionadas con el aprendizaje	84%
Sin relación con el aprendizaje	6%
De gestión	10%
Total	100%

Fuente: Elaboración propia a partir de los datos de la observación de prácticas de aula, 2018.

Es importante destacar que en las instituciones privadas los docentes invierten solamente un 10% en actividades de gestión, porcentaje que es duplicado en las instituciones públicas. Algunas causas de esta diferencia, de acuerdo a lo observado, son:

- La cantidad de estudiantes de cada sección en los colegios privados en su mayoría es menor que en los públicos, por lo que el docente invierte más tiempo en pasar lista, verificar entregas, atender consultas, entre otros. (Ver Anexo 11).
- En los colegios públicos hay mayor cantidad de acciones relacionadas con la gestión que se realizan durante las lecciones (uso del PIAD, actualización de expedientes de adecuación curricular, atención de circulares, comunicados orales a través de personas o parlantes, entre otros). En los privados algunas de estas acciones se realizan a través de correos electrónicos, plataformas institucionales o redes sociales.

Gráfico 4.19

Tiempo promedio de las actividades desarrolladas por los docentes de colegios privados según cada categoría



Fuente: Elaboración propia a partir de los datos de la observación de prácticas de aula, 2018.

*Nota: No se presentaron las actividades de realimenta a partir del monitoreo y corrige los errores.

Los docentes emplean en promedio un 5% más del tiempo en la exposición magistral de contenido, lo que está acorde con que los estudiantes usen más tiempo en la actividad denominada “Presta atención” y menos tiempo en la “Resolución de ejercicios matemáticos” como se presenta más adelante. Además, esto es coherente con el porcentaje de tiempo dedicado a “Monitorear a partir del error” que en este caso fue nulo.

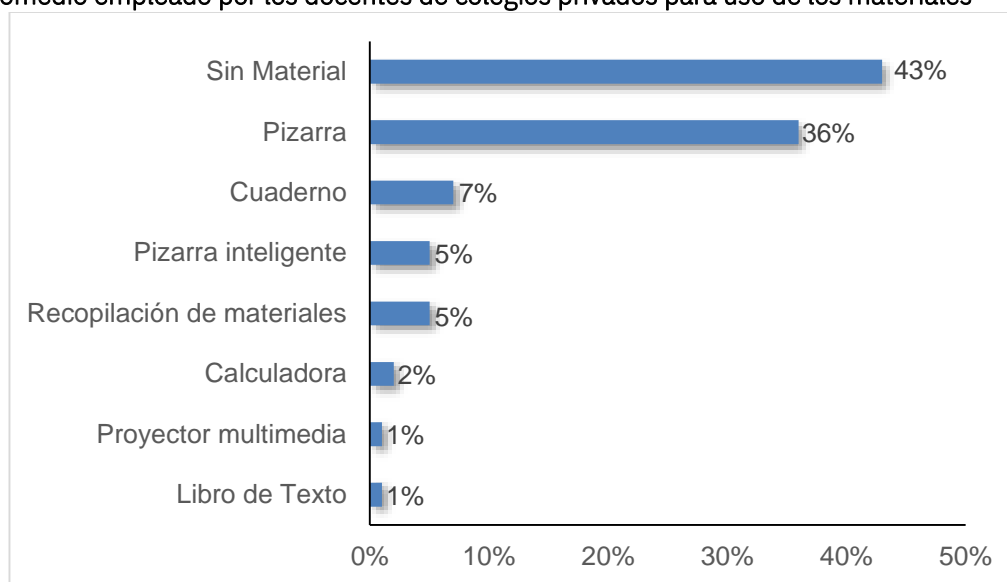
A pesar de la cantidad de actividades relacionadas con el aprendizaje que puede utilizar el docente en la clase, se siguen empleando las tradicionales tanto en centros educativos públicos como privados, como se evidencia en los porcentajes obtenidos en “Dar indicaciones”, “Exposición Magistral del Contenido”, “Pregunta Dirigida” y “Atención de consultas”.

Otro aspecto importante, es que el tiempo destinado a “Realimentar a partir del error” es de 2%, lo cual no es coherente con la propuesta ministerial que le da énfasis al tratamiento del error como fuente de aprendizaje.

Se procederá al detalle del uso del tiempo de acuerdo con los materiales didácticos empleados.

Gráfico 4.15

Tiempo promedio empleado por los docentes de colegios privados para uso de los materiales



Fuente: Elaboración propia a partir de los datos de la observación de prácticas de aula, 2018.

*Nota: No se registró el uso de material lúdico, material concreto, presentación multimedia, Smart TV, computadora, hoja de cálculo, celulares, aplicación de matemáticas en línea y software matemático.

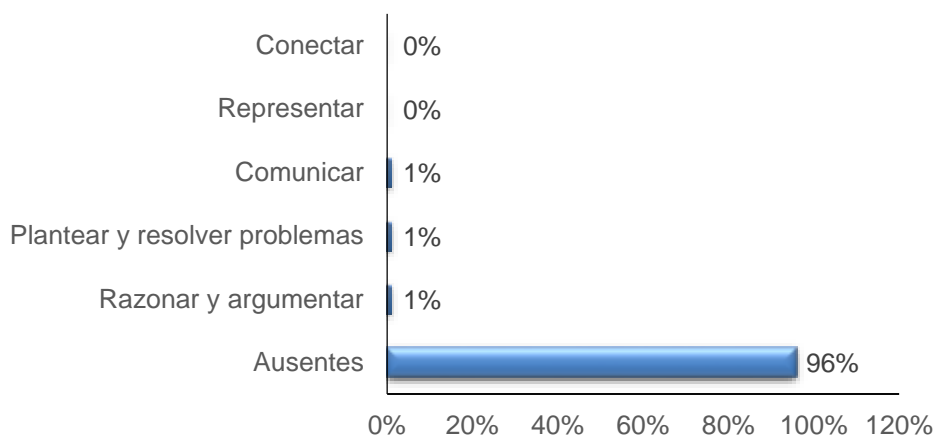
Se destaca un mayor uso de la pizarra tradicional por parte de los docentes de estas instituciones, así como el uso de la Pizarra inteligente en un 5% (este recurso no fue utilizado en las instituciones públicas, debido a que en la mayoría no las hay en las aulas donde se imparte Matemáticas). Es necesario anotar que, durante las observaciones, esta tecnología digital se empleó como un sustituto de la pizarra tradicional porque únicamente sirvió para presentar el contenido. Anteriormente, en el análisis de resultados de los colegios públicos se mencionó este aspecto como una incoherencia con la visión del uso de las tecnologías digitales como eje disciplinar en los programas (MEP, 2012).

Procesos matemáticos

El tiempo apropiado para propiciar los procesos matemáticos en las clases, de manera que se empleen de acuerdo al marco teórico del MEP (2012), pueden ser un indicador de la mediación pedagógica eficaz de acuerdo con lo expuesto por la NCTM (2015) y Calvo et al (2016). Por esta razón, se considera necesario presentar los datos de dos formas, la primera mediante la presencia de los procesos matemáticos en los grupos en general y la segunda de acuerdo con los indicadores de cada proceso.

Gráfico 4.16

Porcentaje de tiempo en el que se presentó algún proceso matemático en clases de colegios privados



Fuente: Elaboración propia a partir de los datos de la observación de prácticas de aula, 2018.

* Esta información corresponde únicamente a lo registrado en el Grupo en General.

Respecto a los procesos matemáticos la ausencia de éstos alcanzó el 96%, únicamente se observaron tres indicadores que alcanzaron valores cercanos al 1%, los cuales se pueden asociar con las actividades que se desarrollan en una clase magistral con ejercicios básicos que implican una comunicación media de ideas matemáticas.

En el cuadro 4.21, se observa que en el proceso Plantear y Resolver problemas se presentó el indicador 3 y en Comunicar el 2, esto se puede justificar como acciones fortuitas, asociadas a intervenciones específicas de estudiantes habilidosos en Matemáticas o con participación en Proyecto Matemática para la Enseñanza Media (MATEM).

Se debe destacar que las actividades cognitivas de los estudiantes se pueden considerar como básicas de acuerdo con lo observado, debido a que el tema y las tareas matemáticas en las que estuvieron trabajando requerían un nivel de exigencia bajo, como es el caso de la habilidad específica de *Analizar subconjuntos de los números Reales en el área de Relaciones y Álgebra*. Se destaca que los procesos Conectar y Representar estuvieron ausentes.

La situación descrita es muy similar a la observada en los colegios públicos porque no se evidencia un porcentaje de tiempo significativo para propiciar los procesos matemáticos. Es importante señalar en ambos escenarios la ausencia de “Conectar”.

Cuadro 4.21

Porcentaje de tiempo en el que se presentó algún indicador de procesos matemáticos en los estudiantes de colegios privados

Procesos	Porcentaje promedio
Enuncian hechos, definiciones o fórmulas (RA1)	1%
Utiliza ejemplos o contraejemplos para fundamentar ideas (RA2)	0%
Describe o explican sus razonamientos (inducción, deducción o generalización) (RA3)	0%
Utiliza las definiciones, fórmulas o algoritmos (PyR1)	0%
Encuentra respuestas o soluciones para la situación planteada (PyR2)	0%
Verifica las soluciones obtenidas (PyR3)	1%
Reconoce las diferentes representaciones de un conocimiento matemático (R1)	0%
Interpreta la información brindada a través de las diferentes representaciones de un conocimiento matemático (R2)	0%
Manipulan diferentes representaciones de un conocimiento matemático (R3)	0%
Identifica el lenguaje matemático involucrado en la situación planteada (CM1)	0%
Expresa sus ideas matemáticas usando diferentes vías de comunicación (CM2)	1%
Utiliza el lenguaje matemático correcto al expresar sus ideas (CM3)	0%
Expresa relaciones entre diferente(s) concepto(s) estudiados del área matemática (C1)	0%
Expresa relaciones entre diferente(s) concepto(s) estudiados de diferentes áreas matemática (C2)	0%
Expresa relaciones entre diferente(s) concepto(s) estudiados de matemática con otras asignaturas (C3)	0%
No hay proceso presente (N)	96%
Total	100%

Fuente: Elaboración propia a partir de los datos de la observación de prácticas de aula, 2018.

*Las siglas están asociadas con los procesos matemáticos de la siguiente manera, RA: Razonar y Argumentar, PyR: Plantear y Resolver problemas, R: Representar, CM: Comunicar y C: Conexión, el número 1, 2 y 3 establece el indicador empleado.

** Esta información corresponde únicamente a lo registrado en el Grupo en General.

Cuadro 4.22

Presencia de procesos matemáticos en los estudiantes E1 y E2 según el código del colegio privado y número de observación

Código del colegio	Observación	Cantidad de veces que se presentaron procesos para estudiante 1							Cantidad de veces que se presentaron procesos estudiante 2						
		PyR1	PyR2	RA2	RA3	CM1	CM2	R2	PyR1	PyR2	PyR3	RA2	CM1	CM2	CM3
1	I	1							1			1			
	II		1												
5	I			1											
	II				2					1		1			
8	I					1									
	II	1					1		2			1			
13	I							1							
	II														
34	I			1											1
	II						3							1	

Fuente: Elaboración propia a partir de los datos de la observación de prácticas de aula, 2018.

*Las siglas están asociadas con los procesos matemáticos de la siguiente manera, RA: Razonar y Argumentar, PyR: Plantear y Resolver problemas, R: Representar, CM: Comunicar y C: Conexión, el número 1, 2 y 3 establece el indicador empleado.

En el cuadro 4.22 se observa que una institución solo presenta 1 indicador en la totalidad del tiempo y los otros evidenciaron como máximo 4, por tanto, ningún colegio alcanza el mínimo que consistía en al menos dos indicadores de la instantánea 4 a la 10, en cada clase.

Tiempo en actividades y uso de material didáctico por parte del estudiante de colegios privados

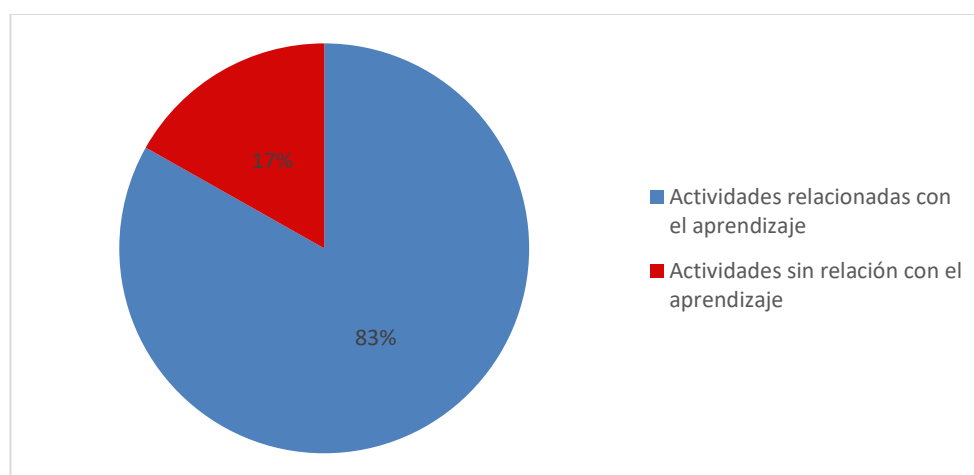
En la mediación pedagógica también se debe considerar la distribución del tiempo al que se someten los estudiantes, de acuerdo con la diversidad de actividades y materiales didácticos.

La información se presenta de forma similar a la utilizada en el apartado de los docentes:

- Estructura general de una clase dividida en dos categorías: actividades de aprendizaje (azul) y sin relación con el aprendizaje (rojo).
- Listado de actividades según las categorías anteriores.

Gráfico 4.17

Distribución del tiempo vivido por los estudiantes de colegios privados en las actividades de aprendizaje y sin relación con el aprendizaje



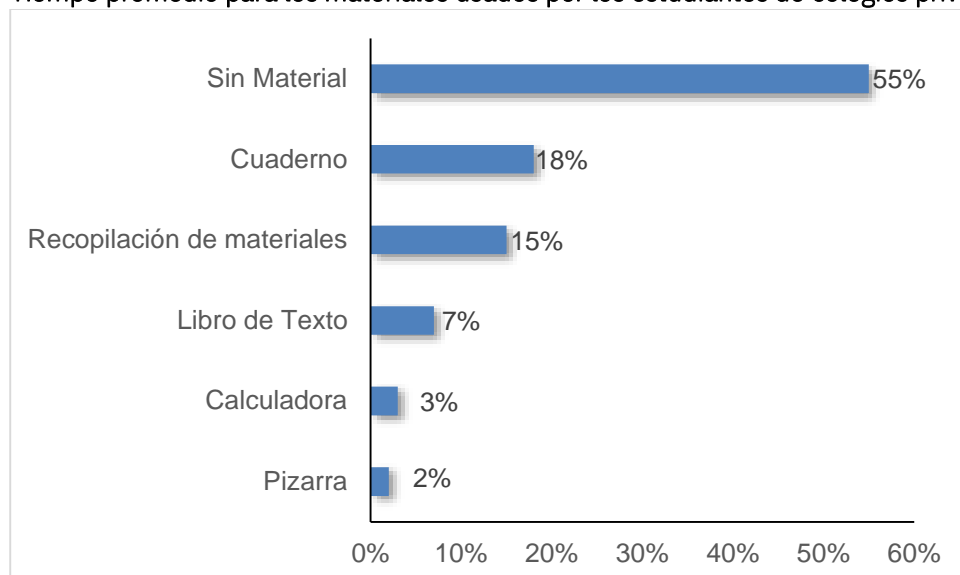
Fuente: Elaboración propia a partir de los datos de la observación de prácticas de aula, 2018.

Al igual que en los colegios públicos, los docentes de instituciones privadas propician actividades relacionadas con el aprendizaje en más de un 80%. El porcentaje correspondiente a las actividades sin relación con el aprendizaje se debe al tiempo en que los docentes realizan actividades de gestión (Cuadro 4.3), las cuales se limitan a la primera y segunda instantánea que no superan los 11 minutos iniciales, por tanto, se espera que los estudiantes *no estén involucrados e interactúen socialmente* entre ellos.

Sin embargo, los datos indican que además algunos alumnos permanecen “Prestando atención” y en “Trabajo Personal”, aun cuando no sea una indicación expresa del docente.

Gráfico 4.18

Tiempo promedio para los materiales usados por los estudiantes de colegios privados



Fuente: Elaboración propia a partir de los datos de la observación de prácticas de aula, 2018.

*Nota: No se registró el uso de material lúdico, material concreto, presentación multimedia, Smart TV, Computadora, Proyector multimedia, Hoja de cálculo, celulares, aplicación de matemáticas en línea, software matemático y pizarra inteligente.

El porcentaje de tiempo obtenido en los rubros “Sin Material” y “Pizarra” son muy similares a los registrados por centros educativos públicos. Se destaca el uso de la calculadora en un 3% en las instituciones privadas porque en las públicas fue nulo.

El uso de “Recopilación de materiales” en los privados disminuye en un 7% en relación con los públicos, se presume que la razón consiste en la obligatoriedad de la adquisición de un libro de texto por estudiante para la asignatura.

Además, se evidencia el desuso de las tecnologías digitales diferentes a la “Calculadora” en discordancia con la propuesta ministerial (MEP, 2012).

Gráfico 4.19

Distribución del tiempo promedio para las actividades del estudiante de colegio privado



Fuente: Elaboración propia a partir de los datos de la observación de prácticas de aula, 2018.

*Nota: No se registró tiempo dedicado a “Resolución del problema con apoyo docente”.

En los centros privados los docentes propician un porcentaje de tiempo para el “Trabajo personal” de 23% y “Presta atención” de 41%, se destaca que estos porcentajes son superiores a los públicos en 8,5 y 9 puntos respectivamente. Esto se puede justificar porque durante las observaciones se nota el predominio de la clase magistral como estrategia de mediación e implica un rol más pasivo por parte de los estudiantes.

Se destaca que en los centros privados se destina un 16% a la “Resolución de ejercicios matemáticos”, mientras que en los públicos alcanza hasta el 29,4%. Esta diferencia porcentual se debe a que el docente de los primeros invierte más tiempo en la exposición magistral implicando más “Trabajo personal” por parte de los estudiantes, entendido por los investigadores como tomar notas, hacer dibujos, esquemas, entre otras, sin la intervención directa del docente.

Aquí concluye la información relacionada con la mediación pedagógica, es necesario indicar que el análisis curricular de la prueba se puede ubicar en la sección de *Resultados de colegios públicos*, debido a que el análisis fue único e incluía a ambos tipos de institución. También puede revisarse con mayor detalle en el Anexo 13.

Idoneidad del perfil

Tomando en cuenta los nueve aspectos descritos para el perfil de idoneidad del docente, 1 alcanza como nota máxima un 71 y los 4 restantes obtienen calificaciones menores a 61. Esto se puede deber a la diferencia que existe entre los lineamientos para instituciones públicas y privadas.

Análisis cuantitativo de la prueba escrita

En este apartado se presentan los resultados obtenidos por los estudiantes en la I y II aplicación de la prueba escrita, con el fin de determinar el cambio en el rendimiento académico antes y después de la mediación pedagógica que propició el docente de cada sección participante.

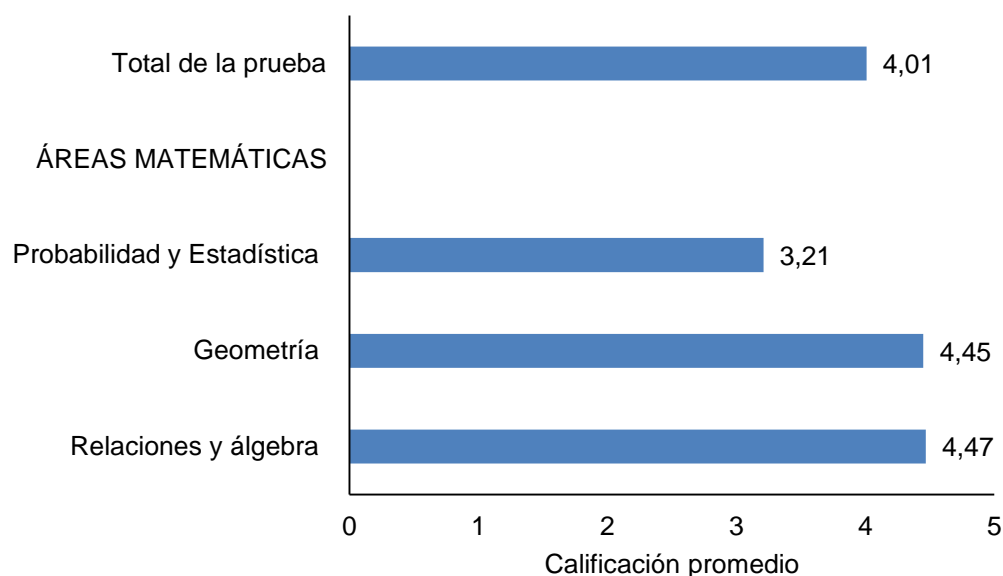
I Aplicación de la prueba escrita

En esta aplicación participaron 73 estudiantes de los 5 colegios privados seleccionados, los resultados se muestran de acuerdo con el promedio general de toda la prueba y las tres áreas matemáticas evaluadas.

En el gráfico 4.20 se evidencia que en promedio los estudiantes obtuvieron una calificación inferior a 4,01 en una escala de 1 a 10. Este dato se puede considerar “muy bajo” sin embargo, se debe recordar que los estudiantes en el momento de realizar la prueba no tenían conocimientos sobre los contenidos evaluados, por lo cual se puede vislumbrar que los resultados obtenidos son producto de los conocimientos previos, proceso de ensayo y error, así como del azar. Además, se debe señalar que, por área de conocimiento, dos sobrepasan el promedio general de la prueba, se nota menor dominio en el área de Probabilidad y Estadística.

Gráfico 4.20

Calificación promedio obtenida por los estudiantes de colegios privados en la primera aplicación de la prueba de conocimientos matemáticos con una escala de 1 a 10.



Fuente: Elaboración propia a partir de la prueba de conocimientos matemáticos con una escala de 1 a 10.

En concordancia con lo reseñado en el gráfico 4.20, se tienen los resultados de la variabilidad obtenida en la prueba y por área, esto se presenta en el cuadro 4.23.

Cuadro 4.23

Varianza obtenida para la calificación por áreas en la primera aplicación de la prueba de conocimientos matemáticos a estudiantes de colegios privados.

Prueba total	Áreas de estudio		
	Geometría	Estadística y Probabilidad	Álgebra
1,78	5,77	3,64	4,50

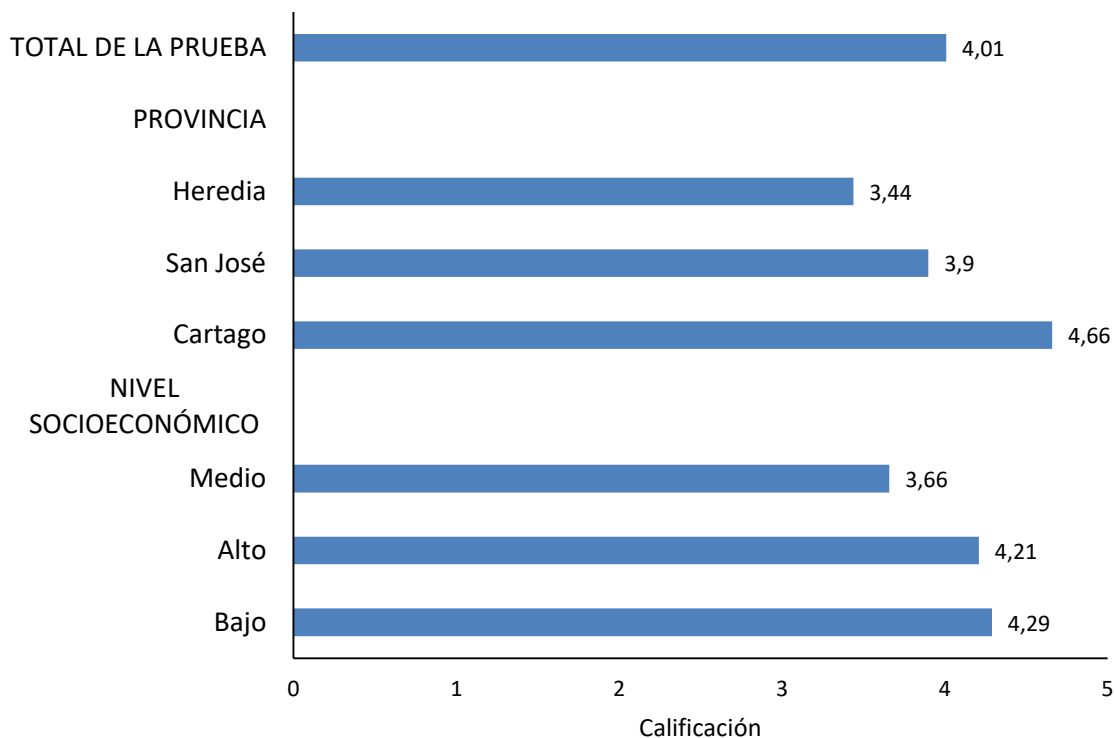
Fuente: Elaboración propia a partir de la prueba de conocimientos matemáticos con una escala de 1 a 10.

Se resalta el hecho que en el área de Geometría es donde hay mayor variabilidad. En la prueba en general se evidencia que la variabilidad es poca, lo cual habla de mayor homogeneidad de los resultados a nivel general de la prueba que por cada área, donde este valor fue mayor.

En el gráfico 4.21, se observan la calificación promedio a nivel de la prueba, caracterizada por variables sociodemográficas.

Gráfico 4.21

Calificación promedio obtenida en la prueba de conocimientos matemáticos a estudiantes de colegios privados según variables sociodemográficas con una escala de 1 a 10.



Fuente: Elaboración propia a partir de los datos de la primera aplicación de la prueba, 2018.

*Para todas las asociaciones de variables el Eta se mantuvo en un rango de 0,18 a 0,30.

Los hechos que resaltan para todas las variables caracterizadas son que la provincia de Cartago, es donde se obtiene la mayor calificación total de la prueba. Además, que los estudiantes con nivel socioeconómico bajo son aquellos que obtienen un promedio superior.

Las variables edad y sexo tienen etas de asociación muy bajo por lo que no se consideran en el gráfico.

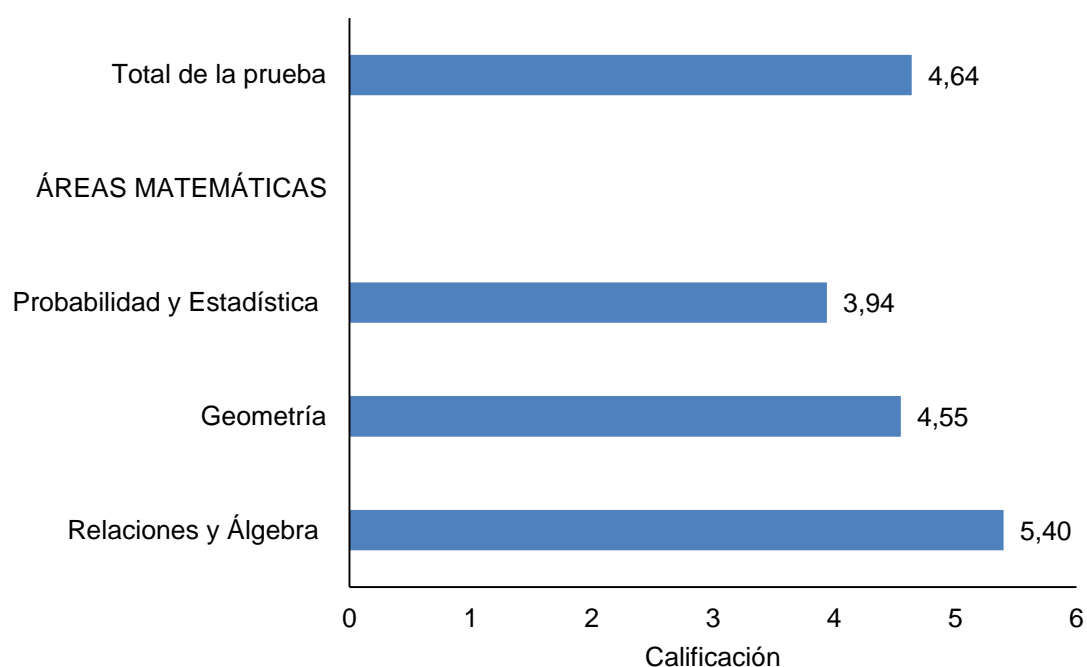
II Aplicación de la prueba escrita

Los datos que se presentan a continuación corresponden a los 5 colegios privados que participaron en la segunda aplicación (67 estudiantes de 73 que realizaron la primera). A diferencia del análisis que se realiza para los colegios públicos, para las instituciones privadas sí se logran comparar los resultados en su totalidad porque estas instituciones cursaron normalmente el periodo lectivo, por tanto, no hubo obstáculos para ejecutar la prueba por segunda vez.

En el gráfico 4.22 se evidencia que en promedio los estudiantes obtuvieron una calificación de 4,64 en una escala de 1 a 10. Este dato se puede considerar “muy bajo” en comparación con un 7 (nota mínima de aprobación a nivel de ciclo diversificado), máxime que se supone que los docentes desarrollaron todos los contenidos evaluados en la prueba, según el nivel de décimo año.

Gráfico 4.22

Calificación promedio obtenida en la segunda aplicación de la prueba de conocimientos matemáticos según áreas de estudio con una escala de 1 a 10.



Fuente: Elaboración propia a partir de los datos de la segunda aplicación de la prueba, 2018.

Se puede observar que, en relación con el promedio total de la prueba, el área Relaciones y Álgebra es la que lo supera, mientras que Estadística y Probabilidad está rezagada se aleja en un 0,7. Es importante señalar, que este último resultado obliga a pensar en las razones por las cuales la nota promedio en esta área no aumentó considerablemente, a pesar de que, los centros educativos correspondientes lograron desarrollar el curso lectivo completo.

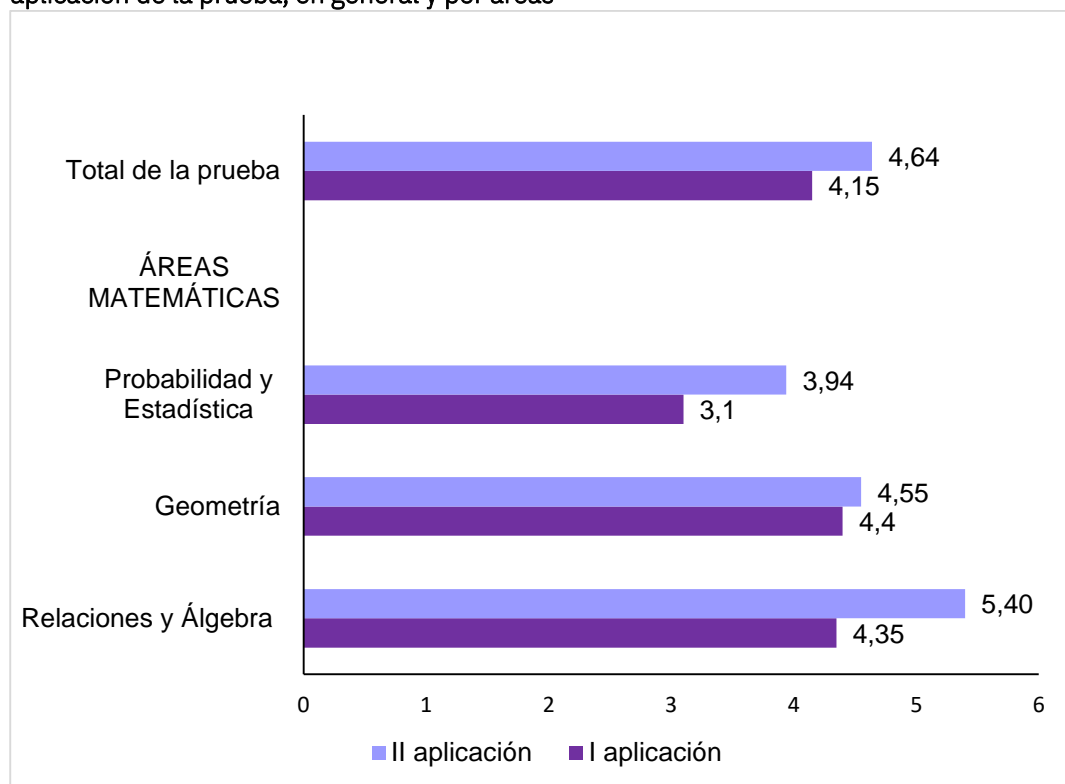
A continuación, se presenta gráficamente las comparaciones realizadas acerca de los resultados de la I y II aplicación de la prueba.

Comparación de las calificaciones obtenidas en I y II aplicación de la prueba escrita

Los datos que se presentan a continuación corresponden a la comparación de los resultados obtenidos en los 5 colegios privados que participaron en la primera aplicación con 73 estudiantes y en la segunda con 67.

Gráfico 4.23

Comparación de las calificaciones promedio obtenidas por los estudiantes de colegios privados en la I y II aplicación de la prueba, en general y por áreas



Fuente: Elaboración propia a partir de las calificaciones promedio obtenidas por los estudiantes de colegios privados en la I y II aplicación de la prueba escrita.

De acuerdo con el gráfico 4.23, en la segunda aplicación se presentó una mejoría en el promedio de calificación, sin embargo, no se considera significativa porque la nota mínima de aprobación es de un 7. Esta situación es alarmante, porque la mediación pedagógica propiciada por los docentes durante el curso lectivo, que en este caso transcurrió normal, no está incidiendo en el rendimiento académico que obtienen los estudiantes, cabe señalar que la primera aplicación se ejecutó al inicio del año sin que los docentes hubiesen desarrollado los temas evaluados. Por alguna razón los alumnos no logran evidenciar los conocimientos matemáticos que estudiaron durante el 2018, algunas suposiciones del equipo investigador son:

- Durante la mediación pedagógica, el docente empleó ejercicios que no eran similares a los utilizados en la prueba.
- El tipo de ítem con que se evalúa en el aula también es diferente a los empleados en este estudio.

En el cuadro 4.24 se muestran los resultados de un modelo de regresión en el cual se incluyeron las siguientes variables:

- Pre_Pos: la diferencia de la calificación obtenida en la I y II aplicación de la prueba escrita.
- Mujer: variable género comparado contra género masculino
- Nivel_medio: nivel socioeconómico medio
- Nivel_alto: nivel socioeconómico alto
- Negativos: Estudiantes con creencias negativas
- Positivos: Estudiantes con creencias positivas
- GAT: Grado académico con estudios secundarios completos más algunos estudios superiores, de los tutores legales del estudiante.

Cuadro 4.24

Modelo de regresión para explicar el cambio de la calificación de la I y II prueba de estudiantes de colegios privados³

Modelo		Coeficientes no estandarizados		Coeficientes tipificados	t	Sig.
		B	Error típ.	Beta		
1	(Constante)	3,295	,542		6,078	,000
	Pre_Pos	,700	,246	,227	2,849	,005
	Mujer	,141	,261	,046	,541	,589
	Nivel_medio	-,112	,284	-,034	-,394	,694
	Nivel_alto	-,066	,568	-,010	-,116	,908
	Negativos	-,307	,297	-,099	-1,035	,303
	Positivos	1,030	,348	,264	2,958	,004
	GAT	,918	,399	,193	2,302	,023

Fuente: Elaboración propia a partir de los resultados de la prueba escrita y el cuestionario sociodemográfico.

³ Para el modelo propuesto se obtuvo un R² de 0,202, además de la verificación de supuestos.

Con una significancia del 5%, se puede observar que los estudiantes de los colegios privados, en los cuales participaron de ambas aplicaciones de la prueba, en promedio aumentaron la calificación de la primera a la segunda en 0,70 puntos, en una escala de 0 a 10. Los estudiantes con creencias positivas aumentaron en promedio 1,03 puntos y los estudiantes cuyos tutores legales tiene como grado académico colegio completo y algún otro estudio aumentaron en promedio 0,91 puntos

De acuerdo con la teoría, los dos ítems incluidos en el cuestionario sociodemográfico aplicado a los estudiantes, contenían elementos únicamente de dos dimensiones de las cuatro que teóricamente Gómez y Chacón (2007, p. 130) indican para las creencias hacia el aprendizaje de la matemática:

- Creencias sobre el significado y la competencia en Matemáticas. Los elementos que ilustran este factor son los referidos a las creencias de auto eficacia y creencias sobre el valor de la tarea.
- Las matemáticas como un dominio de excelencia. Referidas a las creencias relativas a la orientación extrínseca de la meta relacionada con las Matemáticas y creencias de los estudiantes sobre las matemáticas y creencias sobre el aprendizaje y la resolución de problemas matemáticos más desde un punto de vista absolutista.

Es importante indicar que, por la cantidad limitada de ítems que no incluían las cuatro dimensiones, en este estudio lo que se presentan son indicios de las creencias por estudiante y no datos concluyentes. Esta situación puede explicar el comportamiento atípico de los grupos participantes, en los que se esperaría que los positivos siempre aumenten las calificaciones (Abraham et al, 2010; Gómez-Chacón, 2007).

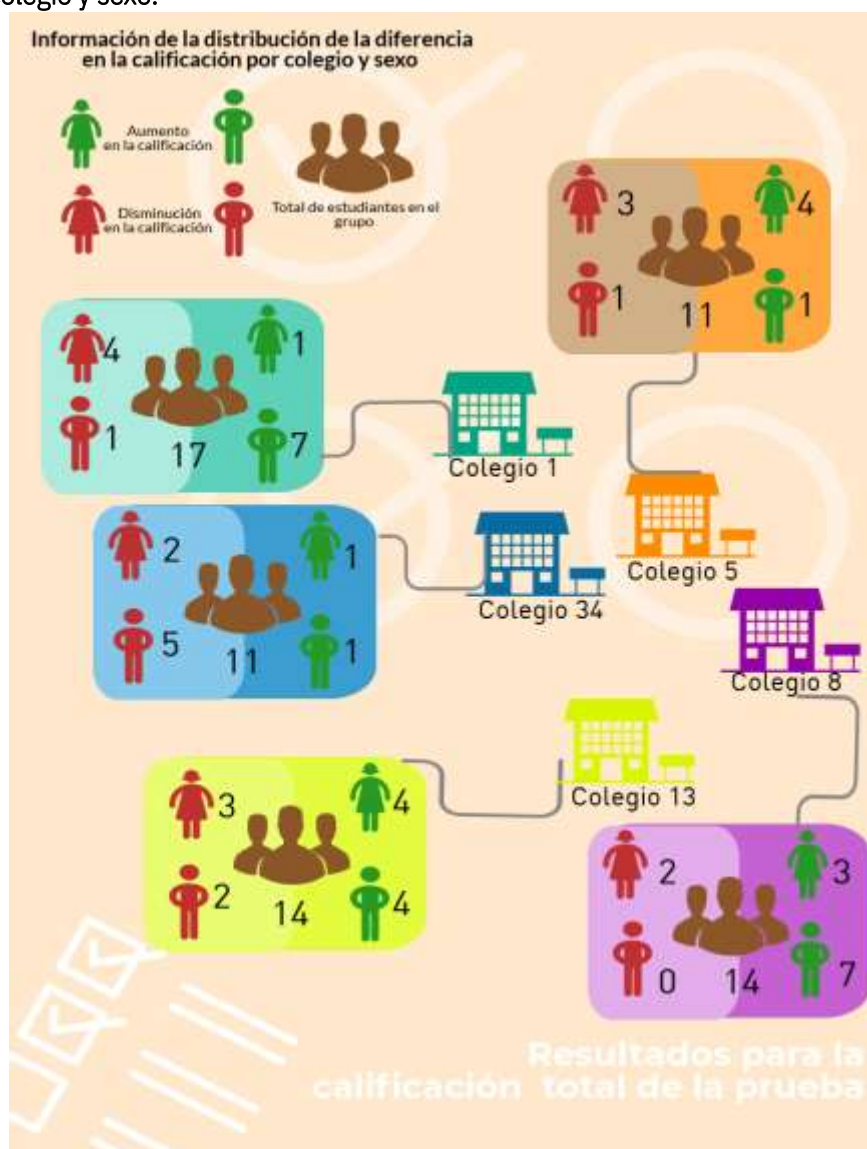
Datos comparativos entre la I y II aplicación

Dado que en las instituciones privadas fue similar la cantidad de estudiantes que aplicaron la prueba en ambos momentos, se realizan las comparaciones tomando en cuenta toda la población estudiantil que cuenta con ambos datos (Ver Anexo 11).

Seguidamente, se presentan infografías para ilustrar los datos, se debe tener en cuenta que para obtener la cantidad de estudiantes que mantuvieron la calificación de una población a otra, se calcula restándole al total del grupo todos los individuos rojos y verdes.

Figura 4.6

Distribución de los estudiantes de colegios privados según la diferencia en la calificación de la I a la II aplicación, por colegio y sexo.



Fuente: Elaboración propia a partir de los resultados de la prueba escrita y el cuestionario sociodemográfico.

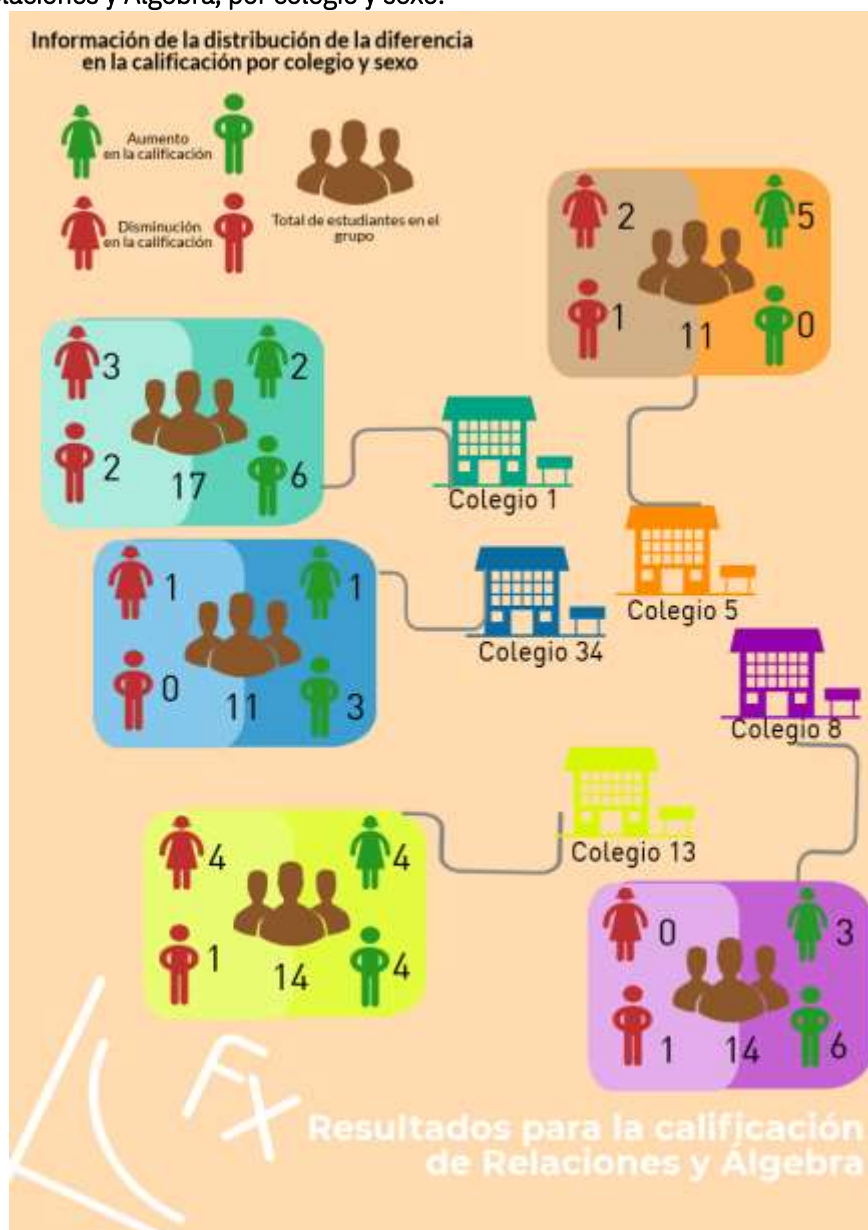
El colegio 34 es el que presenta un comportamiento atípico en comparación con los otros cuatro. Los estudiantes que bajaron la calificación de la I a la II aplicación son menos que los que subieron, siendo en general inferior a la mitad de cada grupo los que bajaron, sin embargo, se puede observar que estos estudiantes son más mujeres que hombres.

Con respecto a lo encontrado en colegios públicos, los privados presentan más estudiantes que bajaron.

Seguidamente, se presentan los datos obtenidos en Relaciones y Álgebra porque en la mayoría de las lecciones observadas se desarrollaron las habilidades específicas del área, esto permite profundizar en el análisis de la mediación pedagógica con las calificaciones de la prueba escrita.

Figura 4.7

Distribución de los estudiantes de colegios públicos según la diferencia en la calificación de la I a la segunda aplicación en Relaciones y Álgebra, por colegio y sexo.

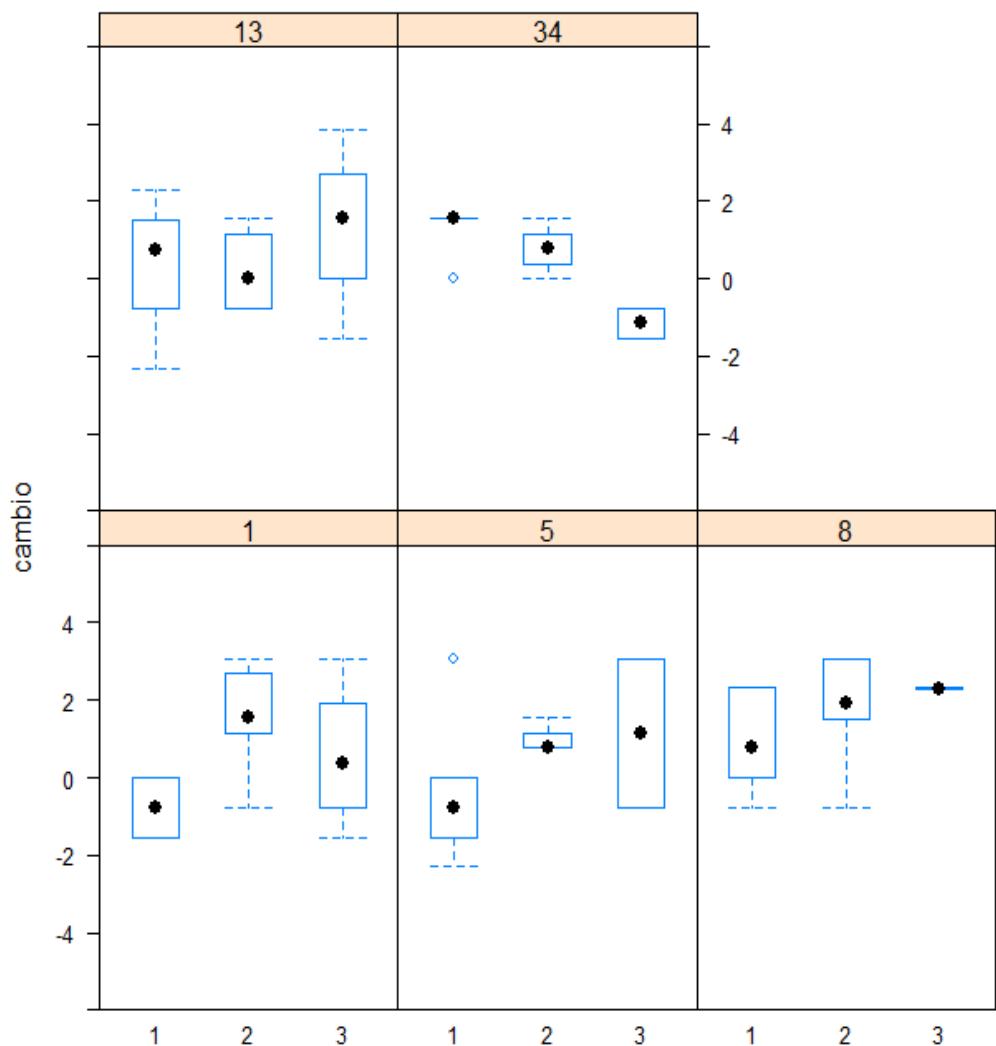


Fuente: Elaboración propia a partir de los resultados de la prueba escrita y el cuestionario sociodemográfico.

Nuevamente el colegio 34 difiere de los otros, ya que, estos presentan una cantidad similar de estudiantes que se mantuvieron, es decir, no hubo incremento en el aprendizaje de esta área, este resultado concuerda con lo evidenciado en colegios públicos.

Gráfico 4.24

Diagramas de cajas según colegios privados, tipos de creencias hacia el aprendizaje de la Matemáticas y diferencia en la nota de la I y II aplicación de la prueba



Fuente: Elaboración propia a partir de la caracterización de los estudiantes, docentes de colegios públicos, resultados de la I y II aplicación de la prueba escrita.

Se observa que en todos los colegios hay presencia de los tres tipos de estudiantes, no obstante, no hay ningún patrón en cuanto al cambio de la calificación de la primera a la segunda aplicación de la prueba, lo mismo sucede con la variabilidad dentro de cada colegio.

Conclusiones y recomendaciones

Conclusiones

De acuerdo con los objetivos de la investigación y teniendo en cuenta que la participación de los colegios privados se utiliza únicamente como referencia, se presentan conclusiones de los datos correspondientes a colegios públicos.

Sobre los estudiantes

- Los estudiantes presentan un alto grado de heterogeneidad, por lo que la característica relacionada con sus creencias hacia las Matemáticas fue la única que permitió establecer tres grupos y a partir de estos describir su nivel socioeconómico, condiciones de aprendizaje ideales y nivel educativo de padres o tutores legales.
- El 50,5% de los estudiantes mostraron una tendencia hacia las creencias negativas. El grupo con creencias positivas, aunque es el más pequeño, está constituido en su mayoría por hombres. Se puede especular que existe un prejuicio hacia el aprendizaje de la Matemáticas, “los hombres son mejores en esta materia” y esto coincide con el hecho de que el grupo que tiene creencias negativas, sea en su mayoría mujeres (Mena, 2014).
- El rol desempeñado en las lecciones es pasivo debido a las actividades propuestas por los docentes, donde predominan las lecciones tradicionales y el trabajo de los estudiantes se limita a la resolución de ejercicios con baja demanda cognitiva.

Sobre los docentes

- Los docentes observados poseen en su mayoría como grado académico mínimo Licenciatura en Enseñanza de la Matemáticas, con formación inicial básica Bachillerato en universidades estatales y una tercera parte no ha recibido ninguna capacitación vinculada con los programas en los últimos cinco años, considerando que estos entraron en vigencia en el 2013.
- Hay dos grupos de docentes: uno que posee conocimiento aceptable de los programas y otro numeroso denominado con conocimiento por mejorar, debido a que este último alcanzó una nota máxima de 4 en una escala de 1 a 10 en el instrumento correspondiente, lo que justifica la poca presencia de los elementos curriculares propuestos por el MEP (2012) durante la observación de aula.
- El grupo que posee conocimiento aceptable de los programas oficiales utiliza el tiempo de manera más eficiente, propone a los estudiantes mayor cantidad de actividades vinculadas con su aprendizaje (hasta en un 10%) y logra mantenerlos involucrados durante periodos más largos, esto en comparación con los que se ubican en la categoría de conocimiento por mejorar.

- El primer grupo realiza más acciones concordantes con las tendencias pedagógicas y didácticas que se incluyen en los programas oficiales, como por ejemplo: monitorear el trabajo personal y usar el error como recurso para ofrecer un feedback a sus estudiantes.
- Los docentes emplearon la resolución de problemas únicamente en 1,3% de las lecciones observadas, aun cuando en los programas se establece que esta actividad debe predominar en la organización de las lecciones y que se debe emplear como recurso para la segunda etapa denominada movilización y aplicación de los conocimientos (MEP, 2012).

Sobre la mediación pedagógica

- Los programas oficiales de Matemáticas proponen la presencia de problemas como herramienta fundamental para el aprendizaje y la movilización de los conocimientos, sin embargo, las acciones estudiantiles vinculadas con los aspectos anteriores, se propició solamente un 2,1% del tiempo observado.
- En más del 88% del tiempo, los estudiantes experimentaron actividades relacionadas con el aprendizaje, esta característica se puede considerar de acuerdo con Román (2010) un indicador de mediación pedagógica eficaz.
- Con respecto a los recursos didácticos, los docentes utilizan con mayor frecuencia los denominados “tradicionales”: pizarra, folletos y libros de texto en concordancia con el porcentaje de tiempo invertido en la clase magistral, en consecuencia, los estudiantes no emplearon ningún material durante el 52% de las lecciones observadas debido a que su principal actividad fue prestar atención.
- Se destaca que la presencia de tecnologías digitales tanto para la enseñanza como para el aprendizaje fue mínima, a pesar de que el MEP (2012) lo incluye como uno de los cinco ejes disciplinares.
- Aun cuando no se evidencian diferencias significativas en la mediación pedagógica aplicada por los dos grupos de docentes, se destaca que aquellos que poseen conocimiento por mejorar, emplean 6% más de su tiempo en actividades no relacionadas con el aprendizaje.
- Respecto a los cinco procesos matemáticos que consideran los programas, en el Grupo en General se evidenció presencia de alguno de ellos en menos del 3% del tiempo efectivo para el aprendizaje. El proceso Representar fue el más propiciado y Conectar estuvo ausente, esto último es consistente con la presencia mínima de la resolución de problemas y por ende, la escasa contextualización, lo cual debilita la posibilidad de vincular conocimientos, áreas y disciplinas (Ruiz, 2017).
- La coherencia entre la fundamentación teórica de los programas oficiales y las prácticas de aula observadas es débil, debido a que, no se evidenció la resolución de problemas contextualizados, el uso de tecnologías digitales y la presencia de procesos matemáticos. Las actividades propuestas por el docente y las realizadas por los

estudiantes corresponden a modelos de enseñanza y aprendizaje tradicionales donde predomina la clase magistral para el desarrollo de contenidos y un rol pasivo para el estudiantado. Sin embargo, se destacan acciones de los docentes ubicados en el grupo de conocimientos aceptables, acordes con la expectativa del MEP (2012) sobre la mediación pedagógica como por ejemplo: el monitoreo del trabajo personal y el uso del error como fuente de aprendizaje.

- Los estudiantes que presentaron la mayor variación positiva en los resultados de la prueba fueron los que estaban a cargo del profesor W, considerado como un caso excepcional dentro del grupo de docentes observados.
- En síntesis, se propusieron cuatro criterios de calidad de la mediación pedagógica en general (Román, 2010) y doce en particular para la Educación Matemática (Calvo et al, 2018; NCTM, 2015), de los primeros solo se tienen evidencias respecto al tercero “Realizar la gestión de aula orientada a la optimización del tiempo efectivo de aprendizaje”, por lo que, queda pendiente la profundización de estudios que permitan determinar el cumplimiento de los otros tres. Sobre los criterios específicos para las clases de Matemáticas como: descubrimiento de relaciones, actividades diversas no repetitivas que propiciaran la discusión, argumentación y razonamiento en resolución de problemas, uso de representaciones, entre otros, los datos indican que muy pocos docentes de los observados lograron satisfacer dichos criterios, situación que es coherente con la calificación obtenida en el perfil de idoneidad. Así, el equipo investigador concluye que la mediación pedagógica observada no fue de la calidad esperada.

Sobre la idoneidad del perfil docente

Un aspecto de la calidad en la mediación pedagógica es que el docente de Matemáticas cuente con las siguientes características:

- Poseer grado académico mínimo Licenciatura en Enseñanza de las Matemáticas.
- Distribuir de manera efectiva el tiempo con respecto a la estructura de la clase.
- Dominar el conocimiento matemático
- Dominar el conocimiento pedagógico
- Dominar el currículo
- Mantener formación continua
- Ser coherente con la percepción del desempeño académico de los estudiantes respecto a las habilidades perseguidas y la autopercepción sobre el nivel de logro alcanzado.
- Proponer actividades de aprendizaje que impliquen exigencia cognitiva para los estudiantes.
- Considerar en la mediación pedagógica diversidad de actividades y materiales.

Estos nueve elementos pueden conformar un perfil idóneo preliminar para la propuesta curricular del MEP (2012), debido a que, se construyó a partir de las condiciones de una población participante. Al respecto, 19 de 30 docentes de instituciones públicas y 4 de las privadas obtuvieron calificaciones menores a 61. Las notas máximas por modalidad de centro educativo, las consiguieron un profesor de colegio público con más de un 90 y uno de privado con un 71. En ambos grupos, las debilidades correspondieron al dominio del currículo, mantenimiento de la formación continua y la propuesta de actividades de aprendizaje que impliquen exigencia cognitiva para los estudiantes.

Sobre la prueba escrita

Medición del rendimiento académico de los estudiantes al inicio y cercano al término del curso lectivo 2018.

- La nota promedio de los estudiantes en la I aplicación de la prueba no alcanzó 4 en una escala de 1 a 10, sin embargo, los colegios de Cartago fueron los únicos en superarla (4,09). En particular, el área matemática Estadística y Probabilidad mostró el menor rendimiento (3,46) de las tres evaluadas.
- La nota promedio de los estudiantes en la II aplicación de la prueba alcanzó 4,6 en una escala de 1 a 10, calificaciones consideradas muy bajas de acuerdo si se toma como parámetro el 7 que es la mínima de aprobación para décimo año. El área Relaciones y Álgebra presentó un incremento en relación con el promedio, mientras que Estadística y Probabilidad siguió rezagada.
- Al comparar los resultados de la I con la II aplicación de la prueba en los colegios públicos y privados que completaron todos los instrumentos de recolección de información, se concluye:
 - Una cantidad significativa de estudiantes mostraron una mejoría en la calificación total de la prueba y este comportamiento fue similar por sexo, sin embargo, el incremento no fue satisfactorio si se considera que la diferencia entre el promedio en ambas aplicaciones fue menor que 1.
 - El grupo de estudiantes con creencias negativas hacia el aprendizaje, a cargo de docentes ubicados en el grupo de “conocimientos aceptables” tendieron a disminuir sus calificaciones de la I a la II aplicación, sin embargo, este comportamiento no se da en los alumnos a cargo de profesores que pertenecen al grupo de “conocimientos por mejorar”, debido a que, las creencias no segregaron a los estudiantes, todos tendieron a mantener o a mejorar sus notas.
 - La mediación pedagógica propiciada por los docentes durante siete meses, no incidió en el rendimiento académico que obtuvieron los estudiantes en la II aplicación de la prueba escrita.

Acerca del análisis curricular

- La prueba que se aplicó a los estudiantes en esta investigación, presentó dos de los tres niveles de dificultad, predominó el denominado *Reproducción* que es considerado el más básico, con una menor exigencia cognitiva y, por ende, es frecuente su presencia en los procesos de enseñanza, aprendizaje y evaluación de las Matemáticas sin importar la mediación pedagógica propiciada. Contenía un ítem de Conexión y ninguno de Reflexión. Al respecto, Ruiz (2017) señala que es necesario realizar un análisis de las tareas matemáticas involucradas en cada ítem a partir de la intervención de los procesos matemáticos para garantizar el equilibrio de los niveles de complejidad y exigencia cognitiva.
- La distribución de los ítems por área matemática no consideró todas las habilidades generales que incluyen los programas para décimo año, evaluando 7 de 19, lo que disminuye la posibilidad de que los estudiantes demuestren sus conocimientos previos o adquiridos hasta el momento de la primera aplicación de la prueba.
- El contexto matemático en Geometría fue privilegiado. En Relaciones y Álgebra se emplearon contextos artificiales o accesorios. La contextualización activa según el MEP (2012), estuvo ausente, porque los enunciados contenían situaciones abstractas sin vínculo con la sociedad, las ocupaciones, las ciencias o intereses propios de los estudiantes (Ruiz, 2017) o eran inverosímiles.
- La prueba utilizada para aproximar rendimiento en esta investigación careció de los siguientes elementos: una distribución apropiada de las habilidades generales por medir, coherencia entre estas y las específicas, diversos niveles de complejidad, contextualización activa y enfoque apropiado del área matemática según los programas oficiales, como por ejemplo en el área de Estadística y Probabilidad que se dio énfasis a la aritmética sobre la interpretación de los datos de acuerdo con el contexto planteado en cada ítem.

Sobre la hipótesis

Se afirma que la hipótesis planteada es verdadera porque se comprobó que la mediación pedagógica incide en el rendimiento de los estudiantes, en este caso se determinó que la primera no fue de calidad, por tanto, los resultados del segundo no mostraron una mejoría significativa.

Recomendaciones

Para los docentes participantes en la investigación

- Fortalecer el dominio de los conocimientos sobre los programas de estudio, para evidenciar en la mediación pedagógica que realiza, la coherencia entre: el enfoque curricular por área, las habilidades generales y específicas, los procesos matemáticos, la estrategia metodológica principal, la organización de las lecciones (según las etapas

y momentos), ejes disciplinares y niveles de complejidad en las tareas matemáticas seleccionadas.

- Transformar las creencias negativas de los estudiantes hacia el aprendizaje de las Matemáticas, a partir del conocimiento de las necesidades e intereses de los adolescentes a cargo, con el fin de plantear problemas con contextos significativos como se plantea en los programas de estudio y propiciar ambientes de aula más inclusivos.
- Participar en eventos académicos, cursos de capacitación y autoformación, presenciales o en línea, que le permitan mantenerse actualizado sobre temáticas como: la resolución de problemas como estrategia metodológica, experiencias exitosas acerca de la implementación de los programas, uso de tecnologías digitales, didácticas específicas para la enseñanza y aprendizaje de la Geometría, Relaciones y Álgebra, Números, Medidas, Estadística y Probabilidad.
- Analizar constantemente material bibliográfico físico o digital que le permita conocer y aplicar nuevas prácticas en la Educación Matemática coherentes con los programas oficiales.

Para el MEP

- Renovar y divulgar el perfil docente que el MEP requiere para implementar los programas de Matemáticas aprobados en 2012, lo cual le permite orientar los procesos de contratación que realiza periódicamente y establecer estrategias de capacitación.
- Dar continuidad a los procesos de formación docente vinculados con los programas oficiales (Lentini y Villalobos, 2014; PREMCR, 2015), que incluyan contenidos sobre la fundamentación teórica, la estrategia metodológica y la didáctica de los conocimientos matemáticos por área, esto porque en la investigación se evidenció, que a pesar de que algunos docentes recibieron capacitación, aún no se percibe el dominio teórico y práctico de la propuesta curricular.
- Incentivar la autoformación mediante cursos y eventos certificados de actualización en temáticas vinculadas con la estrategia metodológica de resolución de problemas y las didácticas específicas.
- Ejecutar mecanismos de acompañamiento docente, dando mayor protagonismo a los asesores pedagógicos regionales del área para garantizar la aplicación de los programas oficiales (Espinoza y Zumbado, 2015; Ruiz, 2013; Ruiz y Barrantes, 2015), debido a que, durante las observaciones, no se evidenció coherencia entre la propuesta del MEP (2012) y las acciones desarrolladas en las clases de Matemáticas.
- Valorar si los ítems que conforman la prueba de bachillerato en Matemáticas o cualquier otra prueba estandarizada que se aplique en un futuro próximo, son coherentes con los programas oficiales del MEP (2012), en cuanto a: la correspondencia entre las habilidades generales y específicas, enfoque curricular por área, uso de la contextualización activa, intervención de los procesos matemáticos y

niveles de complejidad. Así como, su vínculo y desarrollo de la competencia matemática.

Para las entidades formadoras

- Incluir en los planes de estudio, contenidos que permitan desarrollar las habilidades plasmadas en un perfil docente básico requerido por el MEP para implementar los programas de Matemáticas aprobados en 2012, tomando en consideración que esta institución representa el mayor empleador. Asimismo, el egresado debe tener la capacidad de adaptarse a propuestas curriculares emanadas por diversas entidades educativas en las que labore durante su vida profesional.
- Velar porque las prácticas docentes que realizan los estudiantes durante su formación profesional sean coherentes con la propuesta curricular de la institución correspondiente, en particular si se ejecuta en centros educativos públicos, donde se debe aplicar los programas del MEP (2012).
- Promover eventos académicos, cursos de capacitación y autoformación, presenciales o en línea sobre: la resolución de problemas como estrategia metodológica, experiencias exitosas acerca de la implementación de los programas, uso de tecnologías digitales, didácticas específicas para la enseñanza y aprendizaje de la Geometría, Relaciones y Álgebra, Números, Medidas, Estadística y Probabilidad, con el fin de ofrecer a los docentes una oferta de actualización acorde con sus necesidades.

Para futuras investigaciones que involucren observación de aula en Matemáticas

Se proponen las siguientes consideraciones:

- Debido a que, en otros momentos es común la planificación de espacios de evaluación, inicio o final de los tres periodos lectivos, vacaciones y celebración de las efemérides, si se pretende analizar la mediación pedagógica en la introducción de un conocimiento, se recomienda seleccionar periodos como:
 - Mitad del I Periodo (Finales de marzo e inicio de abril)
 - Inicio del II Periodo (Mayo-Junio)
 - Inicio del III Periodo (Última semana de agosto y setiembre)
- Se pueden modificar las instantáneas en el protocolo de observación de aula, considerando que se realicen en intervalos de 4 minutos, con el fin de registrar de manera más detallada lo sucedido en el aula.
- Desarrollar una primera sesión, con la participación del director, el docente de Matemáticas involucrado y la persona de contacto entre la institución educativa y el equipo investigador, con el objetivo de comunicar los propósitos, la importancia de la participación de la institución y la colaboración del docente en el proceso, esto para facilitar el desarrollo del estudio.

- La selección de la muestra debe considerar si las instituciones participantes están inscritas o no en el programa MATEM.

Agenda de investigación

- Es importante que existan investigaciones que establezcan el nivel que los docentes costarricenses poseen actualmente sobre los tres tipos de conocimientos: de contenido, curricular y pedagógico. En particular, siguiendo las tendencias internacionales y el enfoque curricular de los programas de Matemáticas (MEP, 2012), se requieren estudios a profundidad que impliquen observación de aula acerca de las didácticas específicas sobre: Números, Medidas, Relaciones y Álgebra, Geometría, Estadística y Probabilidad, con el fin de diagnosticar la mediación pedagógica del contenido y proponer estrategias de mejora. Además, las observaciones de clase se deben hacer al menos en dos de los tres periodos de un curso lectivo, en los que se desarrollen habilidades de las diferentes áreas para comparar el actuar del docente y del estudiante en diversos conocimientos y momentos.
- En esta investigación no se incluyó el análisis del planeamiento didáctico y su ejecución, por lo que queda pendiente proponer estudios que permitan determinar la coherencia, pertinencia y efectividad de los planes de lección elaborados por los docentes, se puede emplear como antecedente el pilotaje del 2015 ejecutado por el PREMCR.
- Producto de esta investigación surgieron algunos cuestionamientos que podrían orientar futuros estudios:
- ¿Por qué los docentes de colegios públicos obtienen calificaciones similares a los de los privados, respecto al currículo, si los primeros han sido sometidos a procesos de capacitación del MEP y los segundos no?
- ¿Cuánto incidió en los resultados obtenidos durante las observaciones de clase, que el observador fuera docente de matemática, en particular el tiempo efectivo en el aprendizaje PEA?

Limitaciones

- Este proyecto pretendía evidenciar la mediación pedagógica del contenido matemático y las fechas en que se realizaron las observaciones no fueron las más convenientes para su desarrollo, debido a que coincidieron con el cierre del II periodo, en el que los docentes estaban haciendo actividades como: repaso o práctica para la prueba escrita, entrega de promedios y atención de reclamos. A esto se suma que, en muchos de los centros educativos participantes, el periodo de evaluación, se prolonga hasta por ocho días hábiles.
- El equipo técnico del Estado de la Educación realizó el primer contacto con las instituciones educativas participantes y confeccionó una base con los datos de los docentes, secciones, números telefónicos y correos electrónicos de las personas que

funcionarían como enlace. Sin embargo, el equipo investigador tuvo que verificar y recolectar datos adicionales (número telefónico, correo electrónico de uso frecuente y listas de estudiantes) de aquellos participantes cuya información era parcialmente correcta, en los otros casos fue necesario buscar los datos completos, lo cual implicó una inversión de tiempo considerable que provocó el retraso de otras acciones.

- La mayoría de docentes participantes desconocía el propósito del proyecto de investigación (se asumió que el director del centro educativo o la persona de enlace se lo comunicaría), lo que provocó dudas con respecto a la veracidad del estudio, a las calidades de los observadores, a la selección de su persona y grupo a cargo, entre otras. Por lo anterior, el equipo investigador tuvo que dedicar tiempo a aclarar dichas dudas a los profesores y así crear un ambiente adecuado para realizar el trabajo de campo.
- Algunos de los docentes manifestaron poca disposición para completar instrumentos en línea, debido a que, no revisaban frecuentemente el correo del MEP, en otros casos no tenían dominio de tecnologías digitales o no querían utilizar su tiempo personal para realizar estas acciones.
- Es necesario indicar que no se logró realizar la segunda observación de clase en cuatro instituciones públicas ni aplicar por segunda vez la prueba escrita a toda la población estudiantil que sí lo hizo en la primera (no se logró ni el 17%), debido a que muchos de los docentes y centros educativos participaron del movimiento de protesta contra el plan fiscal afectando el horario normal de clases.
- Respecto a la conformación de las bases de datos relacionadas con la I y II aplicación de la prueba escrita, cabe señalar que faltó homologación en la definición de las variables y registro de los datos, esto no estaba dentro la competencia del equipo investigador, lo que obstaculizó el proceso de análisis.
- Debido a que, el equipo investigador se enfrentó por primera vez a un trabajo con estas características, no previó algunos obstáculos como presupuesto, tiempo requerido para confirmar información disponible previa a la inmersión al campo y posterior para la elaboración del informe final.
- Al iniciar la etapa del análisis de datos, el trabajo se distribuyó por conocimientos y disciplinar, sin embargo, luego se notó que lo ideal hubiese sido la participación conjunta por parte del equipo investigador en varias etapas.

Reflexiones finales: una mirada hacia el año 2024

La generación de niños y niñas que ingresaron al primer grado en el 2013, serían los primeros ciudadanos en experimentar los programas de Matemáticas de manera completa, después de haber transcurrido en promedio once años de escolaridad. El ideal del MEP al aprobar los programas de estudio en el 2012, era que estas personas fueran las primeras en alcanzar con plenitud la competencia matemática. Sin embargo, con los resultados de esta investigación se vislumbra un panorama poco alentador para el 2024, a pesar de que el estudio se realizó en aulas de décimo año, surgen las siguientes

interrogantes ¿está sucediendo lo mismo en otros niveles educativos? ¿los estudiantes están desarrollando las habilidades planteadas en los programas? y ¿qué implicaciones tiene esto para alcanzar la meta planteada en el plazo citado?

La generación que egresará de la enseñanza media en el 2024, es la que durante el 2019 concluirá el II Ciclo de la Educación General Básica (sextos años del 2019), tomando como punto de partida este escenario, a 5 años plazo en promedio, se invita a las autoridades ministeriales a reflexionar sobre los resultados y recomendaciones de esta investigación, para determinar acciones a corto, mediano y largo plazo, que les permita establecer la ruta por seguir y alcanzar las aspiraciones de la propuesta curricular en el tiempo esperado, de lo contrario, los resultados no serán del todo satisfactorios.

A continuación, se anotan algunas ideas que a criterio del equipo investigador pueden contribuir a trazar esa ruta.

Expectativas del perfil de salida del estudiante que concluye la enseñanza media

La persona que ha vivenciado la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas mediante el desarrollo de la competencia señalada previamente, debe estar en la capacidad de enfrentar los retos universitarios con una posición propositiva, cuya motivación para aprender sea la necesidad de indagar sobre los problemas del entorno, sin recibir una cátedra adoctrinante sobre cómo hacer su trabajo. Además, logrará comunicar sus ideas en la disciplina que decida ejercer, con argumentos matemáticos sólidos que le permitan respaldar sus afirmaciones y representar sus propuestas de diversas maneras, podrá interpretar la realidad y modelar el comportamiento de esta a través de sus producciones intelectuales en combinación con el uso de la tecnología (MEP, 2012).

También se formarán personas capaces de usar las Matemáticas como herramientas indispensables en cualquier labor (cotidiana o profesional) que desempeñen, por lo que no podrán ser fácilmente engañados con números que fueron colocados para manipular masas, debido a que estarán en capacidad de emitir juicios y tomar decisiones de manera reflexiva.

Para concretar lo anterior, es necesario garantizar la aplicación de la resolución de problemas como estrategia metodológica para la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas a nivel nacional. Además, se requiere una evaluación coherente con la malla curricular, en la que se incluyan los tres niveles de complejidad: reproducción, conexión y reflexión, por ejemplo, establecer mecanismos para valorar las diversas estrategias de solución que el estudiante construye para resolver problemas que involucren diversas

áreas de conocimiento de manera simultánea, escenario que se puede considerar como la situación de mayor exigencia cognitiva plasmado en los programas oficiales.

El reto consiste en que cualquier forma evaluativa que se les aplique a los estudiantes permita evidenciar las destrezas y capacidades matemáticas que poseen, superando lo tradicional que corresponde a una devolución de información desde una perspectiva bancaria.

Expectativas del perfil docente para la enseñanza media según el MEP (2012)

Se espera que el trabajo de los docentes en las aulas favorezca el planteamiento y resolución de problemas y propicie los otros procesos matemáticos como razonar y argumentar, genere situaciones de aprendizaje que obliguen a los estudiantes a comunicar sus ideas matemáticas, que en esa actividad se recurra con fluidez a las representaciones y conecten sus conocimientos de diversas áreas, por ejemplo, Medidas con Geometría cuando se pretende calcular la cantidad de agua que se requiere para llenar una piscina y el costo económico que representa. Esto con el fin de que la mediación pedagógica que se realiza contribuya al desarrollo de la competencia matemática a la que se aspira.

El docente debe ser capaz de trascender el uso técnico de las tecnologías digitales para producir conocimiento matemático en sus estudiantes, de manera que a través de estas se pueda deducir, explorar, crear modelos y hacer conjeturas.

Se requieren docentes dispuestos a indagar sobre didácticas específicas con el objetivo de optimizar cada clase, debido a que la selección del problema es medular para propiciar un ambiente de aprendizaje idóneo para las Matemáticas (Ruiz, 2017). Además, los profesores deben valorar el trabajo colaborativo en los departamentos de Matemáticas en cada institución educativa como una estrategia indispensable para producir recursos didácticos y planes de lección, que puedan ser mejorados, aplicados, sistematizados y compartidos con rigurosidad científica a otros educadores a nivel nacional e internacional, esto concuerda con las ideas de Román (2010) sobre el vínculo entre el planeamiento y la mediación pedagógica de calidad.

El desafío para el MEP, consiste en propiciar un ambiente de trabajo que motive a los docentes a conocer y aplicar los programas de Matemáticas, ofreciendo acompañamiento y procesos de capacitación que le permitan mejorar sus destrezas en el manejo de los fundamentos teóricos y las didácticas específicas, para lograr en los próximos cinco años dirigirnos hacia la meta trazada con paso firme.

Expectativas de la prueba estandarizada en Matemáticas

En el año 2015, el PREMCR señaló algunas limitaciones sobre la micro y macroevaluación y su impacto en el proceso de implementación de los programas, se enfatizó en la necesidad de transformar la prueba de bachillerato, cuatro años después, al realizar esta investigación, las ideas de Mena (2015), a criterio del equipo investigador cobran relevancia y se considera importante retomar las siguientes ideas respecto al diseño y proceso de elaboración de la prueba:

- Incorporar ítems de desarrollo de manera paulatina al formato actual que incluye solo dos tipos: selección (SU) única y respuesta corta (RC).
- Valorar la posibilidad de aplicar la prueba en dos fechas distintas, la primera solo con ítems de desarrollo y la segunda con ítems de SU y RC, esto con el fin de ofrecer a los estudiantes flexibilidad para demostrar sus conocimientos y habilidades.
- Enfocar un porcentaje significativo de los ítems a la resolución de problemas.
- Evaluar la competencia matemática mediante las habilidades generales contempladas en los programas de estudios de Matemáticas, sin delimitaciones producto de las habilidades específicas.
- Incluir de manera balanceada ítems de los tres niveles de complejidad: reproducción, conexión y reflexión.
- Evaluar los procesos matemáticos incluido en los programas oficiales: Razonar y argumentar, Plantear y resolver problemas, Comunicar, Conectar y Representar.

La meta será lograr la incorporación de algunas de dichas expectativas antes del 2024, con el objetivo de poseer una prueba estandarizada que esté acorde con los programas oficiales, máxime considerando que esta evaluación es la que establece el perfil de salida de la educación secundaria y puede establecer las condiciones diagnósticas necesarias para realizar los ajustes pertinentes.

Referencias bibliográficas

- Abraham, Graciela; Mena, Analía; Rodríguez, M. R.; Golbach, M.; Rodríguez, M.; Galindo, Graciela (2010). ¿La actitud hacia la matemática influye en el rendimiento académico? En Lestón, Patricia (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 75-83). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. Recuperado de: <http://funes.uniandes.edu.co/4526/1/AbrahamLaactitudALME2010.pdf>
- Alfaro, G. (abril 2018). *¿Qué significa realizar una tesis doctoral?* Conferencia inaugural del Doctorado en Educación, Sistema de Estudios de Posgrado. Sabanilla, Costa Rica: UNED.
- Alfaro, A.; Alpízar, M.; Arroyo, J.; Gamboa, R. e Hidalgo, R. (2004). *Enseñanza de las Matemáticas en Costa Rica: Elementos para un Diagnóstico*. Proyecto de Graduación para optar al título de Licenciatura en Enseñanza de la Matemática, Escuela de Matemática, Universidad Nacional, Heredia, Costa Rica.
- Arce, C. (1990). *Derecho Educativo*. Editorial EUNED.
- Barrantes, H. y Ruiz, A. (2014). Desafíos para la formación inicial de docentes ante los programas oficiales de matemáticas del MEP. *Quinto informe del Estado de la Educación*. Recuperado de: https://estadonacion.or.cr/files/biblioteca_virtual/educacion/005/Hugo_Barrantes_y_Angel_Ruiz_Desafios_p_la_formacion.pdf
- Calvo, C., Deulofeu, J., Jareño, J., & Morera, L. (2016). *Aprender a enseñar matemáticas en la educación secundaria obligatoria*. Editorial Síntesis.
- Chaves, E. (2007). Una valoración sobre la enseñanza de la Estadística en los colegios académicos diurnos: regiones educativas de San José, Alajuela, Heredia, Pérez Zeledón y Upala. Tesis sometida a consideración del tribunal examinador del Programa de Doctorado Latinoamericano en Educación de la Universidad Estatal a Distancia. UNED.
- Chaves, E., Castillo, M., Chaves, E., Fonseca, J. y Loría, R. (2010). La enseñanza de las matemáticas en la secundaria costarricense: entre la realidad y la utopía. Ponencia preparada para el *Tercero informe del Estado de la Educación*. San José: PEN.
- Chávez, J., Deler, G. y Suárez, A. (2009). Principales corrientes y tendencia a inicios del siglo XXI de la pedagogía y de la didáctica. Dirección Cubana. Ministerio de Educación.
- CIMM. (2013). La reforma de la Educación Matemática en Costa Rica. En: *Cuadernos de investigación y formación matemática*. Recuperado de: <http://www.centroedumatematica.com/Cuadernos/CuadernosCompletos/Cuaderno-especial-julio-2013.pdf>

- DeBellis, V. A. & Goldin, G. A. (2006). Affect and meta-affect in mathematical problem solving: A representational perspective. *Educational Studies in Mathematics*, 63, 131-174.
- Espinoza, J. y Zumbado, M. (2015). Planes piloto en la implementación de nuevos Programas de Matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 10 (13), 227-248. Recuperado de: <https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/19160/19222>
- Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, M. (2014). *Metodología de la Investigación*. Ciudad de México: McGraw-Hill. Recuperado de: <http://www.FreeLibros.com>
- Gil, N., Blanco, L., & Guerrero, E. (2005). El dominio afectivo en el aprendizaje de las matemáticas. Una revisión de sus descriptores básicos. *Revista iberoamericana de educación matemática*, (2) 15-32. Recuperado de: <http://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2218956>
- Gómez-Chacón, Inés. (2007). Sistema de creencias sobre las matemáticas en alumnos de secundaria. *Revista Complutense de Educación*, 18(2), 125-143. Recuperado de: https://www.researchgate.net/publication/27593662_Sistema_de_creencias_sobre_las_matematicas_en_alumnos_de_secundaria
- Landis, J. y Koch, G. (1977). The measurement of observer agreement for categorical data. *Biometrics*, 33 (1), 159-174. Recuperado de <https://pdfs.semanticscholar.org/7e73/43a5608fff1c68c5259db0c77b9193f1546d.pdf>
- Lentini, V. y Villalobos, J. (2014). Condiciones en que se aplica la reforma curricular de matemáticas en colegios públicos diurnos, según los docentes. Ponencia preparada para el *Quinto informe del Estado de la Educación*. San José: PEN.
- Martínez, M., Hernández, M.V. y Hernández M.J. (2014). *Psicometría*. Madrid: Alianza Editorial.
- Mena, J. (2014). Estudio de la ansiedad matemática en los cursos Matemática General, Cálculo Diferencial e Integral y Ecuaciones Diferenciales del Instituto Tecnológico de Costa Rica en el II Semestre 2013 (Tesis de Licenciatura). Instituto Tecnológico de Costa Rica, Cartago, Costa Rica.
- Mena, P. (2015). Desarrollo en la prueba nacional de bachillerato de Matemática: Una necesidad. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 10 (13), 53-66.
- Mena, J. (2018). Análisis de la prueba escrita. Reporte vinculado con la investigación Protocolo de Observación de prácticas de aula y evaluación de los aprendizajes de los estudiantes, 2018 (Documento inédito).
- Mercado, R. (2002). Los saberes docentes como construcción social. La enseñanza centrada en los niños. México: Fondo de Cultural Económica.

- Ministerio de Educación Pública [MEP] (2005a). Programas de estudios de matemática: Tercer Ciclo. San José, Costa Rica.
- Ministerio de Educación Pública [MEP] (2005b). Programas de estudios de matemática: Educación Diversificada. San José.
- Ministerio de Educación Pública [MEP] (2012). *Programas de Estudio de Matemáticas. I, II y III Ciclos de la Educación General Básica y Ciclo Diversificado*. San José, Costa Rica: autor.
- Ministerio de Educación Pública [MEP]. (2015). Educar para una nueva ciudadanía: Fundamentación de la transformación curricular costarricense. Recuperado de http://www.idp.mep.go.cr/sites/all/files/idp_mep_go_cr/publicaciones/7-2016_educar_para_una_nueva_ciudadaniafinal.pdf
- Ministerio de Educación Pública [MEP]. (2015). Fundamentación pedagógica de la transformación curricular. Recuperado de <https://www.mep.go.cr/educar-para-nueva-ciudadania>
- Ministerio de Educación Pública [MEP] (2016). *Política Educativa. La persona: centro del proceso educativo y sujeto transformador de la sociedad*. San José, Costa Rica: autor. Recuperada de: http://cse.go.cr/sites/default/files/documentos/folleto_politica_educativa.pdf
- Ministerio de Educación Pública [MEP] (2017). *Informe Nacional. Resultados de las pruebas nacionales de la Educación Formal 2016. Bachillerato*. Dirección de Gestión y Evaluación de la Calidad. San José, Costa Rica. Recuperado de: <http://www.dgec.mep.go.cr/documentos/informe-nacional-2016>
- Ministerio de Educación Pública [MEP] (2018). *Informe Nacional. Resultados de las pruebas nacionales de la Educación Formal 2017. Bachillerato*. Dirección de Gestión y Evaluación de la Calidad. San José, Costa Rica. Recuperado de: <http://www.dgec.mep.go.cr/documentos/informe-nacional-bachillerato-formal-2017>
- National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2015). *De los principios a la acción. Pars garantizar el éxito matemático para todos*. México D.F: Editando Libros S.A.
- OCDE. (2011). PISA 2009 EUSKADI. Informe de evaluación. Proyecto para la evaluación internacional de estudiantes de 15 años en lectura, matemáticas y ciencias. Recuperado de: <http://www.isei-ivei.net/cast/pub/pisa2009/PISA2009-EUSKADI-1INFORME.pdf>
- Programa Estado de la Nación [PEN], (2017). Sexto informe estado de la educación. Primera Edición. San José, Costa Rica : Servicios Gráficos, A. C. Recuperado de: <https://www.estadonacion.or.cr/educacion2017/assets/preliminares-capitulo-1-ee6-en-baja.pdf>
- Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica [PREMCR]. (2015). Integración de habilidades del currículo oficial de Matemáticas en la acción en el

- aula. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*. 10 (13), 227-248. Recuperado de: <https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/19160>
- Rico, L. (2007). La competencia matemática en PISA. PNA, 1(2), 47-66.
- Rodrich, H y García, M. (2014). Instrumentos de observación de aula estandarizados: metodología Stallings. Ministerio de Educación del Perú. Recuperado de: <http://www.siep.org.pe/wp-content/uploads/0.TALLER-Instrumentos-de-observaci%C3%B3n-de-aula-estandarizados-metodolog%C3%ADa-Stallings.pdf>
- Rojas, W. (junio de 2018). Entrevista sobre proceso de cálculo de coeficiente de concordancia entre jueces. (R. Mora, Entrevistador).
- Román, M. (2010). Investigación latinoamericana sobre enseñanza eficaz. *Educación y ciudad*(19), 81-96.
- Ruiz, A. (2013). Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica. Perspectiva de la praxis. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*. 8 (Número Especial) Recuperado de: <https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/issue/view/1866>
- Ruiz, A. (2017). Evaluación y Pruebas Nacionales para un Currículo de Matemáticas que enfatiza capacidades superiores. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*. 12 (Número Especial). Recuperado de: <https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/issue/view/2552>
- Ruiz, A. (2018). Evaluación y pruebas nacionales para un currículo de Matemáticas que enfatiza capacidades superiores. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*. Número especial, octubre. ISSN 1659-2573. Costa Rica.
- Ruiz, A. (2018). Evaluación y pruebas naciones para un currículo de Matemáticas que enfatiza capacidades superiores. México: CIAEM.
- Ruiz, A. y Barrantes, H. (2015). Informe técnico sobre la implementación de los programas oficiales de Matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*. 10 (13). Pp. 227-248. Recuperado de: <https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/19160/19222>
- Torres, J. y Perera, V. (2009). Cálculo de fiabilidad y concordancia entre codificadores de un sistema de categorías para el estudio del foro online en E-Learning. *Revista de Investigación Educativa*, 27(1), 89-103. Recuperado de <http://www.redalyc.org/pdf/2833/283322804006.pdf>
- UNED. (2004). *Video de clase 1: Clase de matemática del Colegio Metodista* [Película].
- UNED. (2004). *Video de clase 2: Clase de matemática del Colegio Metodista* [Película].
- Villalobos, L. (2017). Enfoques y diseños de investigación social: cuantitativos, cualitativos y mixtos. San José: EUNED.
- Zúñiga, M., Brenes, M., Núñez, O., Barrantes, K., Zamora, L., Sánchez, L y Castillo, M. (2016). Observación directa de ambientes de aprendizaje en centros educativos

costarricenses con distinto desempeño. Ponencia preparada para el *Sexto informe del Estado de la Educación*. San José: PEN.

Anexos

1. Proceso de pilotaje y homologación de jueces para el protocolo de observación de aula

Para la observación de aula se utilizó como método principal el mismo que en el estudio de Zúñiga et al (2016), denominado *Stallings*, el cual es un proceso sistemático de recolección de datos que se basa en la técnica de la observación. Su objetivo es lograr descripciones de lo que sucede en un aula de clase, en términos del uso del tiempo. El instrumento “foto de la clase”, permite registrar a los participantes, las actividades y los materiales que se están utilizando durante el desarrollo de una actividad pedagógica. Este registro se realiza en 10 momentos independientes durante el período de observación (Rodrich y García, 2014, p.7).

Esta investigación empleo el método citado previamente e implicó realizar un proceso que garantizara la confiabilidad entre los jueces que aplicaran el instrumento, debido a que este contenía un conjunto de ítems muy específicos vinculados con los programas de estudio y Educación Matemática.

A continuación, se detallan los procesos de pilotaje y validación que requirió la confección del instrumento, así como el proceso de fiabilidad entre jueces.

Lo primero que se debe indicar es que cinco personas (jueces) aplicaron un instrumento para la observación de clases de Matemáticas, catalogado como un test referido a criterio (TRC). Martínez, Hernández y Hernández (2014) indican que se debe evidenciar, entre otros aspectos, un grado de fiabilidad (concepto que tiene relación con los errores cometidos en los procesos de medición) que se obtiene a través del cálculo de un coeficiente que según las autoras:

Se utiliza sobre todo en aquellos casos en los que dos o más jueces atribuyen puntuaciones al mismo sujeto. Son típicos de ítems de respuesta construida, escalas de observación, y en general de medidas con respuestas abiertas, donde el sujeto elabora la respuesta. Normalmente admiten varios grados de puntuaciones (p. 60).

El instrumento englobaba variables categóricas con diversas codificaciones y por tanto, se hizo necesario calcular coeficientes que evidenciaran el grado de fiabilidad, para esto se seleccionaron y aplicaron dos: Kappa de Cohen y Kappa de Fleiss. El primero permite determinar los pares de jueces que provocan un índice menor al deseado (0,50) y el segundo según Torres y Perera (2009) realizar una generalización de Cohen para medir el acuerdo entre más de dos codificadores u observadores en datos de escala nominal y ordinal.

De esta manera, se concluye que los resultados obtenidos en el trabajo de campo se deben exclusivamente a lo esperado por azar y no por diferencias o sesgos de observación provenientes de los jueces (Torres y Perera, 2009).

A pesar de que las características de los observadores eran muy similares, se procedió a realizar varias fases de homologación de criterios y obtener valores aceptables de fiabilidad en los coeficientes antes mencionados.

Fase 1: Pilotaje real

Los cinco jueces presenciaron la misma clase en el Liceo San Miguel de Desamparados con la sección 10-4 (en condiciones similares a las que se esperaban durante el trabajo de campo) y aplicaron la primera versión del instrumento de observación. Los propósitos perseguidos fueron:

- reafirmar conceptos entre jueces
- verificar dominio del instrumento
- evidenciar posibles contratiempos en el campo y posibles deficiencias del instrumento.
- esclarecer dudas de los observadores

Al concluir la clase, todos los jueces se reunieron para aclarar dudas acerca del registro de la información y consensuar los ajustes que requería el instrumento.

Fase 2: Pilotaje virtual 1

Se contó con dos lecciones reales pregrabadas (UNED, Clase de matemática 10º: video 1, 2004), filmadas en otro momento y con fines distintos, pero que cumplía con las condiciones necesarias para ser utilizado como una simulación de clase.

Cada juez realizó individualmente una primera observación del video y completó en el instrumento base las secciones indicadas en un manual elaborado para garantizar que se observara el mismo actor o acción en determinado momento (instantánea) y así identificar la similitud o diferencia en la codificación de la información.

Luego se realizó el análisis estadístico a los instrumentos de observación completados por todos los jueces y se calculó el índice del consenso, para lo cual se partió del diseñado por Landis y Koch (1977), detallado en el cuadro 1.

Cuadro 1. Valores de índice utilizado en pruebas estadísticas para establecer consenso de observación entre jueces.

Valor del índice	Grado de acuerdo
0.00	Sin acuerdo
0,00-0,20	Insignificante
0,21-0,40	Discreto
0,41-0,60	Moderado
0,61-0,80	Sustancial
0,81-1,00	Casi perfecto

Fuente: Landis y Koch (1977)

En la presente investigación se requerían como mínimo los valores para un grado moderado, por lo cual se consideraron críticos los menores a 0,5. De acuerdo con Rojas (2018), en estos casos la toma de decisiones se orienta a:

- Eliminar del trabajo de campo a los jueces que provocaban un valor por debajo de lo deseado.
- Dar nueva instrucción a los jueces en el manejo del instrumento, realizar nuevas observaciones y posteriormente analizar los datos. Repetir el proceso tantas veces como fuera necesario hasta obtener un valor aceptable.

La segunda opción se consideró más conveniente para este estudio, por tanto, dio lugar al pilotaje virtual 2 descrito a continuación.

Fase 3: Pilotaje virtual 2

Inició con una capacitación para los jueces, a partir de las instantáneas y codificaciones en las que hubo discrepancia en el pilotaje virtual 1. Se hicieron los ajustes en el protocolo de observación y se visualizó otro video de clase (UNED, 2004) con su respectivo manual. Luego se analizó la información registrada por todos los jueces y se calcularon nuevamente los valores de Kappa de Cohen y Kappa de Fleiss, se obtuvo un coeficiente global de 0,84 que se consideró apropiado, debido a que alcanzó un consenso casi perfecto entre los cinco jueces, por lo que, con base en los datos sobre el segundo pilotaje

virtual, se concluyó el proceso y se tomó la decisión de mantener a las 5 personas participantes en el pilotaje del trabajo de campo.

2. Protocolo para la observación de aula

Protocolo de Observación de prácticas de aula y evaluación de los aprendizajes de los estudiantes⁴

Cátedra Didáctica de la Matemática, UNED, 2018.

Instrucciones generales para el uso del instrumento de observación de aula

El siguiente documento presenta las instrucciones dirigidas al observador para la preparación, utilización y sistematización del “Protocolo de observación de prácticas de aula y evaluación de los aprendizajes de los estudiantes”.

Estructura del Protocolo.

El protocolo de observación consta de tres partes:

Cubierta

Aspectos generales de la clase

Hoja de codificación

El observador se debe asegurar que los instrumentos a disposición tienen todas estas secciones.

Preparación previa

Se recomienda considerar los siguientes aspectos como preparación previa de la visita al centro educativo:

Planificar y verificar la visita al centro educativo, la sección por observar y su horario. Confirmar la visita, especialmente con el docente a cargo del grupo.

Definir el tiempo total de la observación para establecer la cantidad de intervalos que se usarán. Se espera que los bloques de clase observados sean de 80 minutos, pero en caso de haber ajustes hay que redefinirlos según la tabla respectiva (Ver página 7). De igual forma se deben considerar los recesos para restarlos al tiempo efectivo de observación.

Preparar los siguientes materiales: el Protocolo e Instructivo de observación, ficha con tabla de códigos y de tiempos, cronómetro o dispositivo para esta función, lápiz, maquinilla, borrador, tabla de apoyo y hojas blancas. No utilizar lapicero.

⁴ Adaptado de: Zúñiga et al. (2016). Observación directa de ambientes de aprendizaje en centros educativos costarricenses con distinto desempeño. Ponencia preparada para el Sexto Informe Estado de la Educación. San José: PEN.

En caso de utilizar el teléfono celular como cronómetro, se recomienda llevar batería adicional o llevarlo totalmente cargado. Es preferible que la observación no sea interrumpida, por lo que se aconseja ponerlo en “modo avión” mientras se está en el proceso.

Aunque se va a tener disponible la tabla de códigos a la hora de realizar la observación, es importante estudiar y memorizar los códigos, con su respectivo significado. Esto puede favorecer la agilidad y comprensión en la tarea.

De forma previa, llenar todos los espacios de la Cubierta con la información que se tiene del centro educativo, grupo y profesor.

Durante la visita al centro educativo

Coordinación anticipada con el colegio

Solicitar al director a través del correo electrónico facilitado por el equipo del Estado de la Educación los datos de contacto del docente, para coordinar las horas y fechas de la observación.

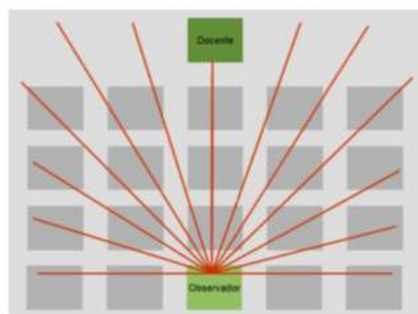
Coordinación previa a la clase

Coordinar anticipadamente con el docente el encuadre, ya sea antes de la clase o por teléfono, para así no interferir en el tiempo efectivo de la clase. Además, se corrobora con el docente la cantidad de tiempo a observar, 50 u 80 minutos según la estructura de las lecciones establecida por la institución, así como los recreos que se tengan de por medio.

El encuadre al docente incluye un saludo y una explicación breve del propósito y del procedimiento. Se recomienda guiarse con el siguiente guión:

“Buenos días/Buenas tardes mi nombre es _____, soy parte del equipo investigador que está realizando un estudio sobre la observación de prácticas de aula y evaluación de los aprendizajes de los estudiantes de décimo año en matemática, en el marco del Programa del Estado de la Educación.

El proceso consta en hacer una observación no participativa por parte de un miembro del equipo investigador, quien debe ubicarse en la parte trasera del aula (ver imagen contigua), con el fin de manejar un ángulo de visibilidad de 180 grados. Durante el tiempo de la observación se les pide omitir nuestra presencia. En relación a esto, le agradecemos comentar al inicio y brevemente a los estudiantes que se realizará dicha observación y que se les solicita no interactuar con nosotros durante el desarrollo de la clase”.



En caso de no haber una silla disponible para el observador este debe quedarse de pie y hacer uso de la “tabla de apoyo” para la documentación. Sin embargo, como previsiones, se coordinará con el docente la disponibilidad de un pupitre adicional.

Coordinación posterior a la clase

Inmediatamente después de la observación, se debe entregar el cuestionario correspondiente al docente. En los casos donde el docente no tenga disponibilidad de tiempo para contestar inmediatamente el cuestionario, se debe coordinar para que en la próxima hora lo entregue en físico.

Asimismo, una vez finalizada la jornada se recomienda, en la medida de lo posible, despedirse formalmente de los docentes y del director o encargado del centro educativo. A su vez, agradecerles por su colaboración.

Codificación del protocolo de observación de clase

Procedimiento para completar la sección I. Cubierta

Para completar esta sección se recomienda seguir las siguientes indicaciones:

Lea previamente el documento.

Se entenderá por Hora de inicio de la clase: el que se registra en el horario institucional.

Se entenderá por Hora de inicio del PEA: el momento en el que el docente empieza a dar la clase, incluyéndose aquí la gestión administrativa.

Recuerde que los aspectos 17, 18 y 19 se pueden completar después de ejecutada la séptima instantánea.

El primer conteo de “Estudiantes presentes en el aula”, pregunta 10, se realizará en la hora de inicio de la clase y el segundo conteo 10 minutos antes de finalizar la lección, para evitar la confusión en el momento de la salida del grupo. No debe registrar el ingreso “por goteo” de los estudiantes durante el desarrollo de la lección.

La pregunta 12 debe ser completada a través de la comprobación del registro del docente al finalizar la clase.

Respecto a la pregunta 13, utilice el espacio y los símbolos para hacer una representación del aula al inicio de la lección.

Respecto a las preguntas 14, 15 y 16, se considerará Introducción, a las acciones del docente que establezcan una relación con la clase anterior, propósito de la clase que inicia o indicación del inicio de un tema nuevo. Respecto al Desarrollo, será el periodo en el que se desarrolla el contenido matemático y finalmente el Cierre serán las acciones del docente que indiquen la conclusión de la clase, un resumen de los contenidos o un cierre pedagógico de la lección, así como alguna indicación sobre el trabajo a futuro.

Verifique que haya completado cada pregunta antes de salir del salón.

Procedimiento para completar la sección II. Aspectos generales de la clase

Para completar esta sección se recomienda seguir las siguientes indicaciones:

Visualizar que esta sección está constituida por tres partes: desempeños esperados de los docentes, clasificación de la clase y conocimientos matemáticos.

Estas secciones deben ser completadas después de la instantánea 7 y hacia el final de la clase.

En desempeños observados de los docentes, se marca según se observó o no la presencia de cada uno de los aspectos señalados durante el desarrollo de la clase, a través de Sí para sí, No para no y NA para no aplica.

Respecto a la clasificación de la clase se debe seleccionar únicamente una de las dos opciones.

Respecto a los conocimientos matemáticos, se debe marcar del listado aquellas habilidades específicas que se desarrollaron durante la clase observada, en caso de duda consultar con el docente antes de abandonar el recinto.

Procedimiento para completar la sección III. Hojas de codificación

Para completar esta sección se recomienda seguir las siguientes indicaciones:

El cronómetro debe empezar a correr en la hora oficial exacta, según el horario establecido en la institución para el inicio de la lección. Aún si no todos los estudiantes o el docente han ingresado al aula, se debe registrar este período de pérdida de tiempo efectivo de la lección.

Una vez iniciada la clase, durante los minutos previos a la primera instantánea (3 minutos), se completa la información faltante en la cubierta de las instantáneas.

Anotar en la hoja de codificación la hora que corresponde para cada instantánea.

La duración de la observación en cada instantánea es de 10 a 15 segundos.

Inicie la observación con el docente, tenga presente las siguientes preguntas:

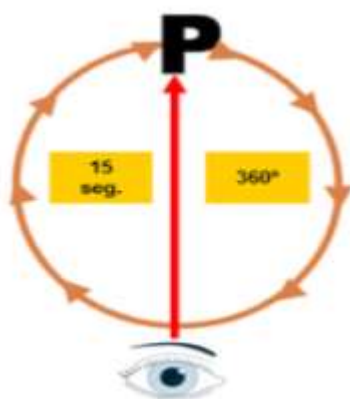
¿Cuántas personas están involucradas?

¿Qué hace o hacen?

¿Qué materiales utiliza o utilizan?

¿Cuál proceso matemático está involucrado?

Luego observe a la clase, en dirección de las manecillas del reloj, de izquierda a derecha, como lo muestra la imagen:



Una vez terminada la observación, ir a la hoja de codificación.

Recuerde que en la columna “Detalle” se indica a quién se está observando donde: “D” corresponde al docente, “GG” corresponde a la observación del grupo en general, “E1” corresponde a la observación de un estudiante y “E2” a una particularidad de otro estudiante diferente a “E1”.

Seguidamente, debe codificar en el siguiente orden:

Al docente: la actividad que hizo el docente en ese momento y el material que estaba utilizando.

Al Grupo en General: la actividad en términos generales que realiza el grupo, los materiales utilizados y la presencia de algún proceso matemático, según la segregación correspondiente.

En la primera línea de Estudiantes: se selecciona a un estudiante, determine con quién está involucrado, qué hace y que materiales usa, así como determinar la presencia de algún proceso matemático.

En la segunda línea de Estudiantes: se anota alguna particularidad de un o algún grupo de estudiantes, determine con quién está involucrado, qué hace y que materiales usa, así

como determinar la presencia de algún proceso matemático. Si no hubiera ninguna particularidad, la línea se deja en blanco.

Después de registrar tanto al docente, el grupo como a los estudiantes, se debe revisar que en la instantánea el docente haya sido codificado en una sola actividad. También asegurarse que lo señalado en la hoja de codificación refleje solo lo visto en la observación y no aspectos posteriores.

Seguidamente, en el espacio blanco de la instantánea registre información de la siguiente manera:

Lo primero que se registra en el espacio abierto de las instantáneas es lo que se observa en los 15 segundos.

Debe hacer una descripción breve de lo que aconteció durante ese periodo.

Posteriormente se pone un símbolo de dos rayas seguidas (//) para hacer otras notas de lo que sucedió antes o después en cuanto a la actividad realizada por el profesor, el grupo en general, los materiales usados, la participación estudiantil y la posible presencia de los procesos matemáticos.

También se pueden usar fórmulas de tiempo como: antes de eso o posteriormente.

Entre la instantánea 8 y 10 diríjase a la parte II. Aspectos generales de la clase, y marque las opciones según lo observado. Si no le alcanza el tiempo para marcar todo, termine de completar una vez finalizada la clase. Incluso en este tiempo no se debe realizar ninguna intervención o interacción con los estudiantes o docente.

Después de la instantánea 8 o puede ser 10 min antes del final de la clase, cuente la cantidad de estudiantes que hay en el aula al finalizar la lección y regístrelos en la cubierta: total y cantidad de hombres y mujeres, pregunta 11.

Distribución temporal para el registro de las instantáneas

Para determinar los momentos en los que se deben realizar las observaciones, se divide el tiempo total de la clase en 10, siendo el número total de instantáneas a realizar por sesión. Inicialmente se deben dejar 3 minutos antes de la primera instantánea para llenar la Cubierta. Generalmente, las lecciones a nivel nacional tienen una duración de 40 minutos y en su mayoría se organizan en bloques de una o dos lecciones. En el caso de algunos colegios privados, trabajan con bloques de lecciones de 50 minutos. En promedio se establecen intervalos de 4 min para la clase de 50 min y 7 min para la clase de 80 min. Por lo que se indica en la siguiente tabla las distribuciones más comunes a utilizar en las observaciones:

Distribución temporal para el registro de las instantáneas en minutos.										
Nº de instantánea Clase	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
50 min	3	7	11	15	19	23	27	31	35	39
80 min	3	10	17	24	31	38	45	52	59	66

A continuación, se presentan reglas generales para la codificación, las cuales se deben considerar a la hora de realizar las observaciones:

La cubierta contiene datos demográficos que se pueden llenar antes de iniciar la primera observación.

El espacio del docente (“D”) se puede codificar solamente una vez por instantánea, ya que el docente solo puede estar participando en una única actividad por observación. Además, este es insustituible, es decir, ninguna persona puede tomar el rol del docente. Por ejemplo, estudiantes en formación, practicantes, padres de familia, director, etc.

Generalmente las actividades relacionadas al aprendizaje se codifican con algún material, mientras que las actividades sin relación con el aprendizaje se registran “SM. Sin material”.

Si en la observación se detecta una actividad que no corresponde a ninguna de las opciones dadas en la Tabla de Codificación se debe especificar dicha situación en el espacio abierto de la instantánea, e indicar cuál es la actividad realizada.

En caso de no tener claridad sobre alguna actividad o material utilizado durante la clase por las personas involucradas, el observador podrá levantarse y observar más de cerca sin ninguna interacción.

Si por alguna situación se atrasa la hora para realizar una instantánea, se debe reducir el intervalo entre la siguiente instantánea. No se debe correr el tiempo para el resto de las observaciones.

Se aconseja no recurrir a la Hoja de Codificación una vez finalizadas las observaciones para realizar cambios posteriores, sobre todo en aquellos casos cuando el docente cambia de actividad justo después de la observación. Sin embargo, se debe valorar cuando resulta necesario hacer una validación entre la parte descriptiva y la codificación realizada.

Códigos del protocolo y descripción detallada

A continuación, se presentan los códigos utilizados en el protocolo. Con la intención de generar una adecuada discriminación entre éstos, se detallan definiciones y aspectos claves a considerar durante el proceso de codificación.

Tabla de códigos

Personas		Materiales			
D	Docente	SM	Sin Material	STv	Smart Tv
GG	Grupo en General	LT	Libro de Texto	CO	Computadora
E1	Estudiante	RM	Recopilación de Materiales	PrM	Proyector multimedia
E2	Estudiante que muestra particularidad			HC	Hoja de cálculo
	Agrupación	Cd	Cuaderno	CA	Calculadora
T	Todos	ML	Material Lúdico	CE	Celulares
I	Individual	MC	Material Concreto.	AML	Aplicaciones de Matemáticas en Línea
#G#	Cantidad de grupos y con cuántas personas	Pi	Pizarra	SMt	Software Matemático
		PM	Presentación multimedia	Pil	Pizarra inteligente

Actividades en el aula										
Relacionadas con el aprendizaje Estudiantes				Relacionadas con el aprendizaje Docente				Sin relación con el aprendizaje		
PC	Plantea Consultas sobre los contenidos	TP	Realiza Trabajo Personal	DI	Da Indicaciones sobre la clase	AC	Atiende consultas de los estudiantes	IS	Interacción Social	
RP	Resolución del Problema	RPD	Resolución del Problema con apoyo Docente	PP	Plantea un Problema	EMC	Exposición Magistral del Contenido	NI	No Involucrado	
RE	Resuelve Ejercicios matemáticos	PA	Presta Atención	PD	Pregunta Dirigida	RC	Realimenta a partir de las Consultas	A	Administración de la clase	
				MTP	Monitorear el Trabajo Personal	RM	Realimenta a partir del Monitoreo			
				CE	Corrige los Errores	RE	Realimenta a partir del Error			

Procesos matemáticos	Código	Desempeños Esperados
Razonar	RA1	Enuncian hechos, definiciones o fórmulas.
	RA2	Utiliza ejemplos o contraejemplos para fundamentar ideas.
	RA3	Describen o explican sus razonamientos (inducción, deducción o generalización).
Plantear y Resolver problemas	PR1	Utiliza las definiciones, fórmulas o algoritmos.
	PR2	Encuentra respuestas o soluciones para la situación planteada.
	PR3	Verifica las soluciones obtenidas.
Representar	R1	Reconoce las diferentes representaciones de un conocimiento matemático.
	R2	Interpreta la información brindada a través de las diferentes representaciones de un conocimiento matemático.
	R3	Manipulan diferentes representaciones de un conocimiento matemático.
Comunicar	CM1	Identifica el lenguaje matemático involucrado en la situación planteada.
	CM2	Expresa sus ideas matemáticas usando diferentes vías de comunicación
	CM3	Utiliza el lenguaje matemático correcto al expresar sus ideas.
Conectar	C1	Expresa relaciones entre diferente(s) concepto(s) estudiados del área matemática.
	C2	Expresa relaciones entre diferente(s) concepto(s) estudiados de diferentes áreas matemática.
	C3	Expresa relaciones entre diferente(s) concepto(s) estudiados de matemática con otras asignaturas.

2.2 Personas involucradas y agrupación

Las actividades realizadas por el docente se codifican en la “D”, el “GG” corresponde a la actividad que realiza el grupo en general, mientras que las actividades que involucran a los estudiantes se codifican en los espacios de “E1” y “E2”. El tipo de agrupación se define al usar “I, T y G”, que hacen referencia a la cantidad de personas involucradas en una actividad específica, a saber:

Personas		
GG	Grupo en General	D Docente
E1	Estudiante	
E2	Estudiante en actividad diferente a E1	
Agrupación		
T	Todos: Clase completa y docente	
I	Individual: Un estudiante	
# G #	Grupos: Cantidad de agrupaciones con determinada cantidad de estudiantes, clasificadas por ejemplo en 3G2 (3 parejas), 5G3 (5 tríos), 4G4 (4 quartetos), 6G5 (6 quintetos), 3G6 (3 sextetos) o más.	

2.3 Procesos matemáticos

RA: Razonar y Argumentar	Claves para codificar: se da cuando los estudiantes utilizan ejemplos o contraejemplos para fundamentar sus ideas, inducción, deducción o generalización. Justifican sus ideas con conocimientos matemáticos.
PR: Plantear y Resolver Problemas	Claves para codificar: se da cuando los estudiantes formulan estrategias para la resolución del problema, encuentra soluciones para la situación planteada o verifica las soluciones obtenidas.
R: Representar	Claves para codificar: se da cuando el estudiante reconoce, usa o interpreta las diferentes representaciones de un conocimiento matemático.
COM: Comunicar	Claves para codificar: se da cuando los estudiantes expresan sus ideas matemáticas usando diferentes vías de comunicación (oral o escrita). También cuando comprende y usa el lenguaje matemático involucrado en la situación planteada.
C: Conectar	Claves para codificar: se da cuando los estudiantes establecen relaciones entre el conocimiento estudiado en la clase y otros conocimientos matemáticos de la misma área, de otra área matemática u otra disciplina.

2.4 Materiales de aula

Categoría	Descripción
SM: Sin material	Claves para codificar: Es cuando no se está usando ningún tipo de material en la clase al momento de la observación.
LT: Libro de texto	Claves para codificar: Son materiales impresos de uso común en las clases, donde los estudiantes pueden leer contenidos educativos de la asignatura. También, pueden contener prácticas que se resuelven en el mismo libro.
RM: Recopilación de Materiales	Claves para codificar: Materiales impresos que suelen ser seleccionados por el docente para presentar un tema en específico. Aunque no funcionan como recursos de escritura, tanto docentes como estudiantes pueden hacer correcciones o tomar apuntes en ellos. Pueden identificarse cuando se utilizaban partes de revistas, fotocopias o textos elaborados por el docente. También se incluyen aquí materiales como exámenes o trabajos extra - clase cuando son solamente revisados durante las clases.
Cd: Cuaderno	Claves para codificar: Recurso que utiliza el estudiante para registrar su trabajo, lugar donde copia los ejercicios de la pizarra, resuelve las prácticas, transcribe las soluciones o notas indicadas por el docente.
PM: Presentaciones multimediales	Claves para codificar: Son todas aquellas presentaciones multimediales (en ppt, en prezi o en otro tipo de formato de presentación) que realiza el profesor para desarrollar contenidos matemáticos. Tendrá prioridad sobre proyector multimedia.
MC: Material concreto	Claves para codificar: Son aquellos elementos que sirven como apoyo visual o manual para que los docentes puedan acompañar la instrucción y mejorar la comprensión de los estudiantes. Estos apoyos pueden ser mapas, gráficos, fotos y carteles, tangrama, portasegmento, franelógrafo, rotafolio, regla y compás, geoplano cuadrado, doblado de papel. Asimismo, materiales utilizados para experimentos, monedas, calculadoras, tarjetas flash, dados, entre otros.
ML: Material lúdico	Claves para codificar: Son todos aquellos recursos que se emplean en juegos didácticos para lograr o fortalecer una habilidad matemática.

Pi: Pizarra	Claves para codificar: Incluye cualquier tipo de pizarra, acrílica o negra, así como elementos para usarlas como tiza, marcadores y borradores. Se utiliza cuando hay interacción directa o cuando permite referirse a un contenido escrito en ella. Este material se selecciona aun cuando los estudiantes no están escribiendo en ella, pero prestan atención a la pizarra sin ningún otro material que priorizar.
Pil: Pizarra inteligente	Claves para codificar: Este es un sistema tecnológico integrado generalmente por una computadora, un proyector y dispositivo de control de puntero. Su principal característica es que los docentes o estudiantes pueden interactuar directamente sobre la superficie de proyección y guardar el resultado.
STv: Smart Tv	Claves para codificar: Dispositivo que se utiliza para mostrar a los estudiantes a través del televisor información relacionada con el desarrollo de la clase.
Co: Computadora	Claves para codificar: Se refiere al uso específico de computadoras, generalmente portátiles.
PrM: Proyector Multimedia	Claves para codificar: Esta categoría se utiliza cuando se emplea el proyector, aunque este incluya otros recursos como la computadora o una pizarra para proyectar.
HC: Hoja de Cálculo	Claves para codificar: Es un recurso didáctico que pretende facilitar el cálculo de gran número de datos o la creación de representaciones gráficas por parte de los estudiantes y el docente.
Ca: Calculadora	Claves para codificar: Se refiere el uso de este dispositivo en específico o al uso de la calculadora del celular.
Ce: Celulares	Claves para codificar: Incluye todos aquellos dispositivos inalámbricos con acceso a la red de telefonía móvil, desde los celulares de primera generación hasta los smartphones o teléfonos inteligentes. Su uso en el aula puede ser por un lado recreativo o distractor, y por otro lado enfocado al aprendizaje.
AML: Aplicaciones de Matemáticas en Línea	Claves para codificar: Recurso didáctico digital, gratuito y en línea disponible a través de teléfonos inteligentes o computadoras que permiten realizar comprobaciones o experimentar propiedades de diversos objetos matemáticos.

SMT: Software Matemático	Claves para codificar: Software específico para matemáticas y que se accede a través de licencia en equipo específico.
--------------------------	--

2.5 Actividades en el aula

Relacionadas con el aprendizaje: Estudiantes

PC: Plantea Consultas sobre los contenidos	Claves para codificar: el o los estudiantes plantean consultas concretas y pertinentes al docente, en relación a los contenidos tratados ya sean de índole conceptual o procedimental
TP: Realiza Trabajo Personal	Claves para codificar: los estudiantes realizan el trabajo asignado (tomar notas, hacer dibujos, esquemas, etcétera) sin intervención directa del docente y se consigna con material.
RP: Resolución del Problema	Claves para codificar: los estudiantes trabajan en la resolución del problema introductorio planteado sin intervención directa del docente.
RPD: Resolución del Problema con apoyo Docente	Claves para codificar: los estudiantes trabajan en la resolución del problema introductorio planteado, pero guiados por la intervención directa del docente, quien sugiere la estrategia a seguir.
REP: Resuelve Ejercicios matemáticos	Claves para codificar: los estudiantes resuelven en su cuaderno o pizarra, el o los ejercicios planteados.
PA: Presta Atención	Claves para codificar: hay indicios de que el estudiante ejecuta acciones como: escucha detenidamente, mira a la pizarra, observa al docente o al estudiante que está manifestando alguna idea. Se consigna sin material.

Relacionadas con el aprendizaje: Docente

DI: Da indicaciones sobre la clase	Claves para codificar: el docente da instrucciones o normas sobre el trabajo a desarrollar durante la clase relacionado con el contenido matemático.
AC: Atiende Consultas de los estudiantes	Claves para codificar: el docente atiende las consultas puntuales de los estudiantes, sin hacer retroalimentación al grupo.

PP: Plantea un Problema	Claves para codificar: el docente plantea un problema para realizar el trabajo en clase.
EMC: Exposición Magistral del Contenido	Claves para codificar: el docente desarrolla una clase de matemática a través de la exposición de teoría, ejemplos y ejercicios.
PD: Pregunta Dirigida	Claves para codificar: el docente realiza preguntas concretas a estudiantes específicos, con el fin de orientar el proceso de pensamiento, activar conocimientos previos o conectar contenidos.
RC: Realmente a partir de las Consultas	Claves para codificar: el docente brinda realimentación al grupo a partir de las consultas planteadas por los alumnos.
MTP: Monitorear el Trabajo Personal	Claves para codificar: el docente recorre el aula observando el trabajo realizado por los alumnos en torno al problema planteado o los ejercicios asignados.
RM: Realimenta a partir del Monitoreo	Claves para codificar: el docente brinda una realimentación, a partir de las diferentes estrategias, procedimientos, propuestas, y errores detectados durante la etapa de trabajo independiente.
CE: Corrige los errores	Claves para codificar: el docente señala los errores detectados en el trabajo de los estudiantes.
RE: Realimenta a partir del Error	Claves para codificar: el docente brinda realimentación a partir de los errores detectados.

Sin relación con el aprendizaje

IS: Interacción Social	Claves para codificar: se da cuando los estudiantes o el docente, se relacionan en torno a temas ajenos a los contenidos matemáticos de la clase: fútbol, series de TV, en otras.
NI: No Involucrado	Claves para codificar: se da cuando un estudiante, un subgrupo, la totalidad de estudiantes o el docente, no están involucrados con las actividades de aprendizaje propias del desarrollo de la clase, entre ellas, mirar el teléfono, leer un texto, usar audífonos, entre otras.

A : Administración de la clase	Claves para codificar: se da cuando se invierte el tiempo en actividades de gestión de aula, pero no propiamente de aprendizaje (organizar grupos, dar indicaciones, revisar pendientes, recibir tareas o pasar lista, entre otras).
--------------------------------	--

3. Instrumento para la Observación de prácticas de aula y evaluación de los aprendizajes de los estudiantes⁵

Cátedra Didáctica de la Matemática, UNED , 2018.

Consecutivo

--	--	--	--	--	--

I. Cubierta

Fecha de la observación: _____

1. Nombre del centro educativo: _____

2. Profesor(a): _____

3. Nombre del observadora(a): _____

4. Observación: () 1 () 2

5. Sección objetivo: 10- _____

6. Hora de inicio de la clase: ____:____

8. Hora de finalización del PEA: ____:____

7. Hora de inicio del PEA: ____:____

9. Hora de finalización de la clase: ____:____

Estudiantes presentes en el aula

10. Al inicio de la clase Total: _____ Hombres _____ Mujeres: _____

11. Al final de la clase Total: _____ Hombres _____ Mujeres: _____

12. Cantidad total de estudiantes matriculados en esta sección: _____

Ubicación del observador

13. En el siguiente esquema, asumiendo que es el espacio del aula y que la "P" es la pizarra, marque la ubicación con:

13.1 O: para Observador



⁵ Adaptado de: Zúñiga et al. (2016). Observación directa de ambientes de aprendizaje en centros educativos costarricenses con distinto desempeño. Ponencia preparada para el Sexto Informe Estado de la Educación. San José: PEN.

13.2 **S**: para puerta principal de salida

13.3 **E**: para escritorio del docente

13.4 **⊖**: pupitre sin estudiante

13.5 **X**: pupitre con estudiante



II. Aspectos generales de la clase

Una vez finalizadas las instantáneas, lea los siguientes apartados y llénelos según lo visto en la clase.

17. Desempeños esperados de los docentes

Marque con una "X" si observó o no cada descriptor con base en las acciones desarrolladas durante la mayor parte del tiempo de la clase.	Sí	No	NA
17.1 Incorpora elementos del contexto en las actividades propuestas.			
17.2 Muestra dominio de los conocimientos matemáticos en estudio.			
17.3 Muestra dominio didáctico de los conocimientos matemáticos.			
17.4 Permite el trabajo personal de los estudiantes.			
17.5 Dispone del tiempo para que los estudiantes tengan el espacio para desarrollar trabajo matemático.			
17.6 Plantea preguntas para establecer relaciones con los conocimiento previos de los estudiantes.			
17.7 Plantea preguntas orientadoras para apoyar la construcción de conocimiento.			
17.8 Responde a las preguntas de los estudiantes con otras preguntas que favorecen la construcción de respuestas por parte del estudiante (sin dar ellos la respuesta).			

18. Clasificación de la clase:

_____ 18.1 *I Momento*: Introducción de un conocimiento nuevo

_____ 18.2 *II Momento*: Fortalecimiento de las habilidades específicas

19. Conocimientos matemáticos

Determinar los conocimientos matemáticos

Listado de habilidades específicas del programa oficial de Matemática para 10º año (MEP, 2012).

Relaciones y álgebra (RA)	
	1. Analizar subconjuntos de los números reales.
	2. Utilizar correctamente los símbolos de pertenencia y de subconjunto.
	3. Representar intervalos numéricos en forma gráfica, simbólica y por comprensión.
	4. Determinar la unión y la intersección de conjuntos numéricos.
	5. Determinar el complemento de un conjunto numérico dado.
	6. Identificar si una relación dada en forma tabular, simbólica o gráfica corresponde a una función.
	7. Evaluar el valor de una función dada en forma gráfica o algebraica, en distintos puntos de su dominio.
	8. Analizar una función a partir de sus representaciones.
	9. Calcular la composición de dos funciones.
	10. Representar gráficamente una función lineal.
	11. Determinar la pendiente, la intersección con el eje de las ordenadas y de las abscisas de una recta dada, en forma gráfica o algebraica.
	12. Determinar la ecuación de una recta utilizando datos relacionados con ella.
	13. Analizar gráfica y algebraicamente la función cuadrática con criterio $f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$.
	14. Plantear y resolver problemas en contextos reales utilizando las funciones estudiadas.
	15. Relacionar la representación gráfica con la algebraica.
	16. Analizar sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.
	17. Plantear y resolver problemas en contextos reales, utilizando sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas.

Estadística (E)	
	1. Utilizar diferentes tipos de representaciones gráficas o tabulares para el análisis de datos cualitativos y favorecer la resolución de problemas vinculados con diversas áreas.
	2. Resumir un grupo de datos mediante el uso de la moda, la media aritmética, la mediana, los cuartiles, el máximo y el mínimo, e interpretar la información que proporcionan dichas medidas.
	3. Identificar la ubicación aproximada de las medidas de posición de acuerdo con el tipo de asimetría de la distribución de los datos.
	4. Utilizar la calculadora o la computadora para calcular las medidas estadísticas correspondientes de un grupo de datos.
	5. Determinar la media aritmética en grupos de datos que tienen pesos relativos (o ponderación) diferentes entre sí

	6. Utilizar la media aritmética ponderada para determinar el promedio cuando los datos se encuentran agrupados en una distribución de frecuencias.
Probabilidad (P)	
	1. Describir relaciones entre dos o más eventos de acuerdo con sus puntos muestrales, utilizando para ello las operaciones: “unión”, “intersección” y “complemento” e interpretar el significado dentro de una situación o experimento aleatorio.
	2. Representar mediante diagramas de Venn las operaciones entre eventos.
	3. Reconocer eventos mutuamente excluyentes en situaciones aleatorias particulares.
	4. Deducir mediante situaciones concretas las reglas básicas (axiomas) de las probabilidades.
	5. Deducir las propiedades relacionadas con la probabilidad de la unión y del complemento.
	6. Aplicar los axiomas y propiedades básicas de probabilidades en la resolución de problemas e interpretar los resultados generados.
	7. Utilizar probabilidades para favorecer la toma de decisiones en problemas vinculados con fenómenos aleatorios.

III. Hoja de Codificación

Instantánea 1. Hora: _____:_____	Descripción cualitativa	Detalle	A.	Act.	Mat.	P
		D	–			–
		GG	–			
		E				
		E				

Instantánea 2. Hora: _____:_____	Descripción cualitativa	Detalle	A.	Act.	Mat.	P
		D	-			-
		GG	-			
		E				
		E				

Instantánea 3. Hora: _____:_____	Descripción cualitativa	Detalle	A.	Act.	Mat.	P
		D	-			-
		GG	-			
		E				
		E				

Instantánea 4. Hora: _____:_____	Descripción cualitativa	Detalle	A.	Act.	Mat.	P
		D	-			-
		GG	-			
		E				
		E				

Instantánea 5. Hora:_____:____	Descripción cualitativa	Detalle	A.	Act.	Mat.	P
		D	-			-
		GG	-			
		E				
		E				

Instantánea 6. Hora:_____:____	Descripción cualitativa	Detalle	A.	Act.	Mat.	P
		D	-			-
		GG	-			
		E				
		E				

Instantánea 7. Hora:_____:____	Descripción cualitativa	Detalle	A.	Act.	Mat.	P
		D	-			-
		GG	-			
		E				
		E				

Instantánea 8. Hora:_____:____	Descripción cualitativa	Detalle	A.	Act.	Mat.	P
		D	-			-
		GG	-			
		E				
		E				

Instantánea 9. Hora:_____:____	Descripción cualitativa	Detalle	A.	Act.	Mat.	P
		D	-			-
		GG	-			
		E				
		E				

Instantánea 10. Hora:_____:____	Descripción cualitativa	Detalle	A.	Act.	Mat.	P
		D	-			-
		GG	-			
		E				
		E				

4. Cuestionario docente

Fecha de la observación: _____

Consecutivo

--	--	--	--	--

El siguiente cuestionario tiene como objetivo recopilar información sobre la labor del docente con respecto a la asignatura de matemáticas. Las respuestas que usted ofrezca son completamente confidenciales y serán utilizadas para el estudio sobre las prácticas de aula y evaluación de los aprendizajes de los estudiantes en décimo año. Agradecemos sus respuestas.

1. Edad en años cumplidos: _____

2. Sexo: _____

2.1 Mujer.

2.2 Hombre.

3. Tiempo que tarda en trasladarse de su lugar de habitación en tiempo lectivo al centro educativo _____ horas _____ minutos.

4. Condición laboral:

4.1 Propiedad

4.2 Interino

4.3 Por contrato

5. Años de servicio laborados como docente (sumando los de esta y otras instituciones)

6. Cantidad de años laborados solo en este centro educativo: _____

7. Cantidad exacta de lecciones de matemática (puede incluir las de reforzamiento) asignadas en este centro educativo: _____

8. Categoría Profesional

8.1 Mt-1

8.2 Mt-2

8.3 Mt-3

8.4 Mt-4

8.5 Mt-5

8.6 Mt-6

8.7 No aplica

9. Estudios superiores realizados:

Grado académico	Especialidad	Institución universitaria	Año en que se obtuvo
9.1			
9.2			
9.3			
9.4			
9.5			
9.6			

10. Indicar cuáles capacitaciones ha llevado en relación con los Programas de estudio de Matemática a partir del 2012.

Nombre de la capacitación o un aproximado	Año en que la recibió	Institución que la ofreció
10.1		
10.2		
10.3		
10.4		
10.5		

11. De acuerdo con la clase desarrollada el día de hoy ¿cuál es su autopercepción sobre el nivel de logro alcanzado?

- 11.1 _____ Total
- 11.2 _____ Parcial
- 11.3 _____ Nulo













11.4 Razones:

12. Aspectos relacionados con los fundamentos de los Programas de estudio de Matemáticas

Lea las siguientes frases e indique falso (F) o verdadero (V) según su criterio.

Frase sobre los fundamentos de los programas	F o V
12.1 Se prohíbe el uso de la clase magistral tanto para primaria como para secundaria.	
12.2 Los programas de Matemáticas de secundaria están articulados con los de primaria.	
12.3 Las indicaciones puntuales son únicamente sugerencias para el docente, es decir, puede o no acatarlas.	
12.4 Las indicaciones metodológicas contienen delimitaciones de los temas.	

13. A continuación, se le presentan varios términos, marque con equis (x) los correspondientes a procesos matemáticos incluidos en los Programas de Estudios de Matemática.

13.1 <input type="checkbox"/>  Investigar	13.2 <input type="checkbox"/>  Conectar	13.3 <input type="checkbox"/>  Argumentar	13.4 <input type="checkbox"/>  Reproducir
13.5 <input type="checkbox"/>  Modelar	13.6 <input type="checkbox"/>  Matematizar	13.7 <input type="checkbox"/>  Generalizar	13.8 <input type="checkbox"/>  Representar
13.9 <input type="checkbox"/>  Comunicar	13.10 <input type="checkbox"/>  Reflexionar	13.11 <input type="checkbox"/>  Plantear y resolver problemas	13.12 <input type="checkbox"/>  Razonar

14. Lea de manera cuidadosa el texto del siguiente recuadro.

El currículo de Matemáticas costarricense está orientado por _____.

Encierre con un círculo el término que completa correctamente la frase anterior:



14.1 Competencias



14.2 Habilidades



14.3 Objetivos

15. A continuación se le presentan varias expresiones, marque con equis (x) las que aluden a uno o alguno de los cuatro momentos para organizar la clase incluidos en los Programas de Estudios de Matemática.

	15.1 Trabajo estudiantil independiente
	15.2 Desarrollo del tema por parte del profesor
	15.3 Planteo del problema por parte del profesor
	15.4 Planteo del problema por parte del estudiante
	15.5 Resolución de ejercicios y problemas por parte del profesor
	15.6 Discusión interactiva y comunicativa solo entre estudiantes
	15.7 Discusión interactiva y comunicativa entre estudiantes y profesor
	15.8 Cierre del tema por parte del docente
	15.9 Cierre del tema por parte del estudiante

16. PAREO

A continuación, se le presentan dos columnas. En la A se encuentran algunas descripciones y en la B se presentan los niveles de complejidad de los problemas antecidos de un número, según los Programas de Estudios de Matemática costarricense. Escriba en el paréntesis el número que asocia cada nivel con su descripción. Quedan dos paréntesis en blanco.

Columna A		Columna B
Son aquellos problemas que requieren para su resolución calculadoras o computadoras.	()	1. Reproducción
Son aquellos problemas que requieren para su resolución únicamente algoritmos, fórmulas o procedimientos rutinarios.	()	2. Conexión
Son aquellos problemas que requieren para su resolución estrategias de una mayor complejidad debido a que implica tomar decisiones.	()	3. Reflexión
Son aquellos problemas que requieren para su resolución la intervención del docente y la tecnología.	()	
Son aquellos problemas que requieren para su resolución varios conocimientos de una misma área matemática o de más áreas matemáticas.	()	

17. De forma general, ¿Si usted tuviera que evaluar el desempeño académico en matemática de este grupo de estudiantes, cómo lo calificaría? Use una escala de 1 al 10, siendo 1 el más bajo.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----

5. Prueba escrita



MATEMÁTICAS

Fecha: _____ N° de identificación del estudiante: _____

Primer nombre

Primer apellido

Segundo apellido

Institución _____

Nombre del aplicador

Firma del aplicador

Estimado estudiante, el siguiente documento consta de dos partes, la primera es un conjunto de ítems de Matemáticas y la segunda corresponde a preguntas personales.

Este documento es propiedad del Ministerio de Educación Pública, y el Estado de la Educación, su reproducción parcial o total para fines comerciales está prohibida por la ley.

INSTRUCCIONES

1. Escriba los datos que se solicitan en la hoja de respuestas para la lectora óptica (Mark Qual).
2. Lea cuidadosamente cada ítem.
3. Si lo desea, puede usar el espacio al lado de cada ítem para escribir cualquier anotación que le ayude a encontrar la respuesta correcta. Sin embargo, lo que se califica son las respuestas seleccionadas y escritas en el espacio asignado en la hoja de respuestas para la lectora óptica.

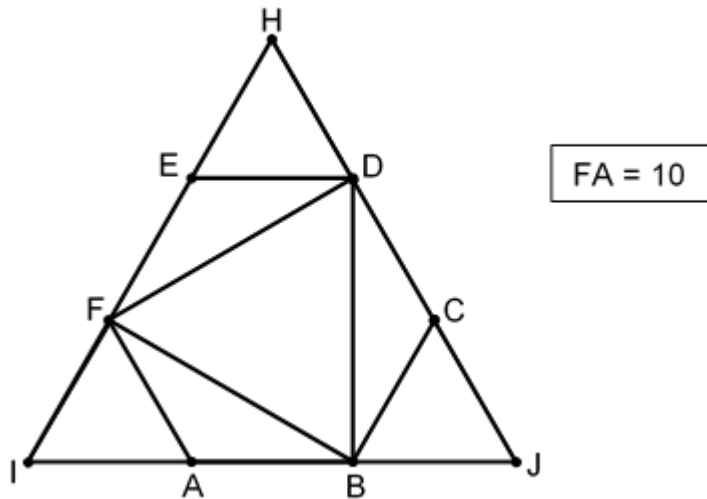
Primera Parte: ítems de selección única

1. De las cuatro posibilidades de respuesta: A), B), C) y D), que presenta cada ítem, solamente una es correcta.
2. Una vez que haya revisado todas las opciones y esté seguro o segura de su elección, rellene completamente el óvalo correspondiente en la hoja de respuesta, tal como se indica en el ejemplo.



SELECCIÓN ÚNICA

Considere la siguiente figura, que muestra el $\triangle DFB$, el hexágono regular $ABCDEF$ y el $\triangle HIJ$, para responder los ítems 1 y 2:



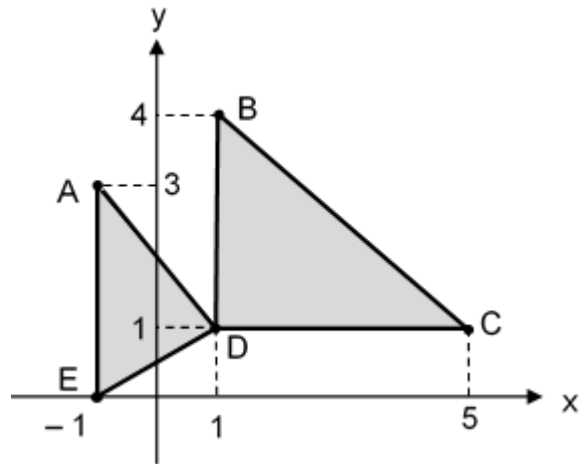
1) El perímetro del $\triangle HIJ$ es

- A) 60
- B) 90
- C) $25\sqrt{3}$
- D) $225\sqrt{3}$

2) El área del $\triangle DFB$ es

- A) $30\sqrt{3}$
- B) $60\sqrt{3}$
- C) $75\sqrt{3}$
- D) $150\sqrt{3}$

Considere la siguiente representación gráfica para responder los ítems 3 y 4:



3) El perímetro del $\triangle BCD$ es

- A) 6
- B) 12
- C) $9 + \sqrt{7}$
- D) $9 + \sqrt{41}$

4) ¿Cuál es el área del $\triangle ADE$?

- A) 2
- B) 3
- C) $\frac{3}{2}$
- D) 6

5) Considere la siguiente información:

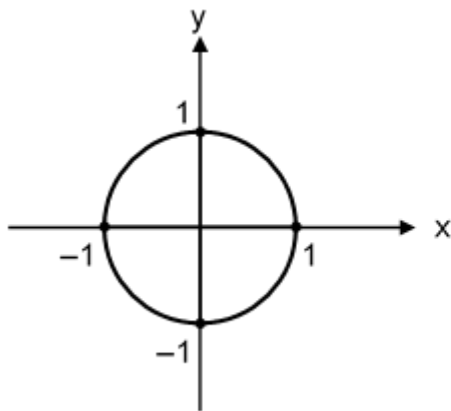
x	9	7	k	4	3	0
f(x)	4	11	6	1	0	2

Para que la tabla anterior corresponda a la representación tabular de una función, un posible valor de "k" es

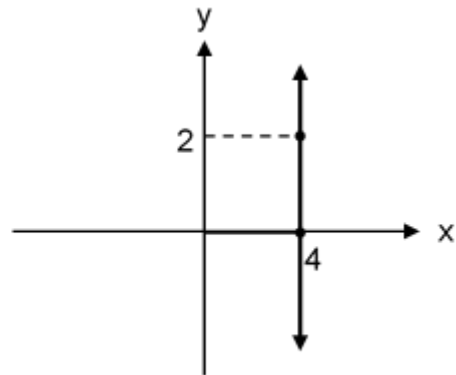
- A) 0
- B) 1
- C) 7
- D) 9

6) Considere las siguientes representaciones gráficas:

I.



II.

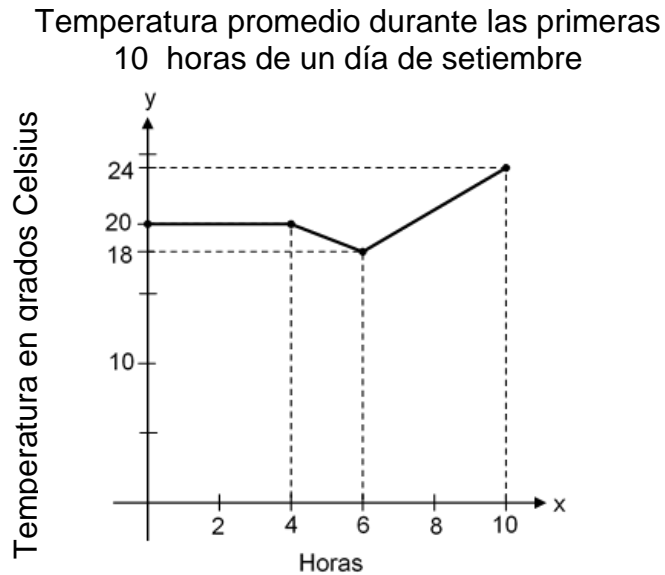


De acuerdo con la información anterior, ¿cuál o cuáles representaciones gráficas corresponden a una función?

- A) Ambas
- B) Ninguna
- C) Solo la I
- D) Solo la II

Considere la siguiente información para responder los ítems 7 y 8:

La siguiente gráfica representa la temperatura promedio, por horas, de un día de setiembre, de acuerdo con una de las estaciones meteorológicas automáticas del Instituto Meteorológico Nacional de Costa Rica.



Fuente: Adaptado de <http://www.imn.ac.cr>

- 7) Un intervalo del tiempo en el cual aumentó la temperatura corresponde a
- A) [2, 6]
 - B) [4, 6]
 - C) [0, 4]
 - D) [6, 8]
- 8) ¿Cuál fue la temperatura promedio, en grados Celsius, registrada a las 6 horas?
- A) 6
 - B) 10
 - C) 18
 - D) 20
- 9) Considere la siguiente información:

Sea f una función cuadrática, tal que, su gráfica interseca el “eje y ” en $(0, 3)$ y su vértice es $(2, 9)$.

De acuerdo con la información anterior, considere las siguientes proposiciones:

- I. Un intervalo en el cual f es decreciente es $]3, +\infty[$.
- II. La gráfica de f interseca el “eje x ” en dos puntos diferentes.

De ellas, ¿cuál o cuáles son **verdaderas**?

- A) Ambas
- B) Ninguna
- C) Solo la I
- D) Solo la II

10) Considere la siguiente información:

En una actividad, el valor de 10 entradas para adulto y 9 para niño es $\$51\,200$ y el valor de 15 entradas para adulto y 17 para niño es $\$83\,100$.

De acuerdo con la información anterior, si cada entrada para adulto tiene el mismo valor y cada entrada para niño tiene el mismo valor, entonces el valor, en colones, de una entrada para niño es

- A) 1800
- B) 2633
- C) 2695
- D) 3300

- 11) Considere la siguiente información, la cual hace referencia a las temperaturas promedio, en grados Celsius ($^{\circ}\text{C}$), registradas en la estación meteorológica ubicada en el Aeropuerto Internacional Juan Santamaría, durante los meses de marzo desde el año 2006 al 2014.

Temperatura promedio marzo 2006 – 2014

Año	Temperatura promedio 2006 – 2014
2006	24,2
2007	24,9
2008	23,8
2009	23,8
2010	25,2
2011	23,9
2012	24,3
2013	23,4
2014	23,2

Fuente: Adaptado del Compendio Ambiental 2015 del Estado de la Nación

De acuerdo con la información anterior, considere las siguientes proposiciones:

- I. La temperatura promedio más usual fue de $23,8^{\circ}\text{C}$.
- II. El 50% de los datos de las temperaturas promedio fue mayor o igual que $25,2^{\circ}\text{C}$.

De ellas, ¿cuál o cuáles son **verdaderas**?

- A) Ambas
- B) Ninguna
- C) Solo la I
- D) Solo la II

12) Considere la siguiente información:

Precio, en dólares, por galón de combustible en seis países de América Central al 12 de setiembre del 2016

País	Diésel	Gasolina Regular	Gasolina Súper
A	2,36	2,77	2,90
B	2,28	2,79	2,99
C	2,72	3,23	3,45
D	2,83	3,41	3,49
E	3,00	3,67	3,84
F	2,25	2,65	2,73

Fuente: Adaptado de <http://www.centralamericadata.com>

De acuerdo con la información anterior, considere las siguientes proposiciones:

- I. La mayor diferencia de los precios de la gasolina regular es \$0,27 más baja que la mayor diferencia de los precios de la gasolina súper.
- II. El precio, en dólares, por galón del diésel en el país C es mayor que el promedio de los precios, en dólares, del diésel en esos seis países de América Central.

De ellas, ¿cuál o cuáles son **verdaderas**?

- A) Ambas
- B) Ninguna
- C) Solo la I
- D) Solo la II

Considere la siguiente situación para responder los ítems 13 y 14:

Se tiene un dado de seis caras, cada una de ellas con un número diferente del 1 al 6 y otro dado de ocho caras, cada una de ellas con un número diferente del 1 al 8. Al lanzar estos dados, cada cara de cada dado tiene la misma probabilidad de quedar en la parte superior.

Se definen los siguientes eventos:

- Evento A: Obtener en la parte superior un número mayor que 3.
- Evento B: Obtener en la parte superior el número 5.
- Evento C: Obtener en la parte superior un número menor o igual que 7.
- Evento D: Obtener en la parte superior un número par.

Para cada uno de los eventos se puede lanzar el dado de seis caras o el de ocho caras.

13) Considere las siguientes proposiciones:

- I. La probabilidad de que ocurra el evento A, es mayor si se lanza el dado de ocho caras.
- II. La probabilidad de que ocurra el evento B, es mayor si se lanza el dado de seis caras.

De ellas, ¿cuál o cuáles son **verdaderas**?

- A) Ambas
- B) Ninguna
- C) Solo la I
- D) Solo la II

14) Considere las siguientes proposiciones:

- I. La probabilidad de que ocurra el evento C, es mayor si se lanza el dado de seis caras.
- II. La probabilidad de que ocurra el evento D, es mayor si se lanza el dado de ocho caras.

De ellas, ¿cuál o cuáles son **verdaderas**?

- A) Ambas
- B) Ninguna
- C) Solo la I
- D) Solo la II

6. Cuestionario sociodemográfico

A continuación, encontrará algunas preguntas personales y de su familia. La información recolectada es completamente confidencial y será utilizada con fines de investigación, sin revelar los nombres de quienes la brindaron. Si algo no está claro o si no está seguro(a) de cómo contestar una pregunta, puede pedir ayuda a la persona encargada de la aplicación. Conteste con la información que crea verdadera. Gracias.

1. Nombre y apellidos: _____
2. Edad: _____
3. Sexo: () Masculino () Femenino
4. ¿Recibió educación preescolar? () Sí () No
5. ¿Alguna vez repitió un año en la escuela? () Sí () No
6. En el colegio, ¿ha tenido que adelantar o arrastrar materias? () Sí () No
7. ¿Quién es la persona que se encarga de usted ante la escuela? (es la persona que con mayor frecuencia viene a las reuniones del colegio, le ayuda a hacer tareas, recoge la nota, entre otros). **Marque solo una opción**
 - () Papá
 - () Mamá
 - () Hermanos
 - () Abuelos
 - () Otros parientes
 - () Otras personas
8. ¿Cuál es el máximo nivel de estudios al que llegó esa persona? (**marque solo una opción**)
 - () No completó la escuela
 - () Escuela completa
 - () Colegio incompleto
 - () Colegio completo
 - () Universitaria

9. En una semana ¿cuántas horas extra dedica a estudiar matemática, además del horario del colegio? _____

10. Recibe algún tipo de ayuda como las siguientes (**puede marcar más de una opción**):

- () Beca (Avancemos, Fonabe, otros)
- () Comedor estudiantil
- () Transporte
- () No recibo ningún tipo de ayuda

11. ¿Cuántas de estas cosas hay en su casa?

	Ninguno	Uno	Dos	Más de dos
Televisores				
Carros				
Habitaciones con baño privado				
Teléfonos celulares con acceso a Internet (teléfonos inteligentes)				
Computadoras (de escritorio, laptop o notebook)				
Tabletas (por ejemplo, iPad®, BlackBerry®, PlayBook™)				
Lector de libros electrónicos (por ejemplo, Kindle™, Kobo, Bookeen)				
Servicio de televisión por cable (Sky, Cable Tica, Amnet, etcétera)				
Consola de video juegos (Xbox®, Play Station®, Nintendo®)				
Instrumentos musicales (por ejemplo, guitarra, piano, etc.)				
Obras de arte (por ejemplo, pinturas)				

12. Piense en las siguientes situaciones y seleccione la opción con la que se siente más identificado. **Marque solo una opción en cada enunciado.**

a. Podría recibir una mala calificación en un examen de matemática porque...

- Los temas evaluados en ese examen son muy difíciles
- No estudio lo suficiente para el examen
- Me cuesta cualquier tema relacionado con matemática
- Me apuro a responder y no reviso mis respuestas antes de entregar la prueba

b. Podría recibir una buena calificación en un examen de matemática porque...

- Manejo con facilidad cualquier tema relacionado con matemática
- Estudio mucho para el examen
- Soy relativamente bueno haciendo cualquier examen
- Busco ayuda para estudiar y prepararme para el examen

7. Descripción estadística del perfil docente

Cruces para el perfilamiento con clúster o grupo de la calificación total

Cuadro 1. Datos cruzados Edad Recodificada*Número de caso de clúster

		Conocimiento aceptable	Conocimiento por mejorar	Total
Edad Recodificada	De 20 a 29 años	0	1	1
	De 30 a 39 años	4	7	11
	De 40 a 49 años	3	12	15
	De 50 a 59 años	1	2	3
Total		8	22	30

Cuadro 2. Datos cruzados Sexo*Número de caso de clúster

		Conocimiento aceptable	Conocimiento por mejorar	Total
Sexo	Mujer	4	13	17
	Hombre	4	9	13
Total		8	22	30

Cuadro 3. Datos cruzados Categoría Profesional *Número de caso de clúster

		Conocimiento aceptable	Conocimiento por mejorar	Total
Categoría Profesional	Mt-4	0	5	5
	Mt-5	2	5	7
	Mt-6	6	12	18
Total		8	22	30

Cuadro 4. Datos cruzados Condición laboral*Número de caso de clúster

		Conocimiento aceptable	Conocimiento por mejorar	Total
Condición laboral	Propiedad	6	15	21
	Interino	2	7	9
Total		8	22	30

Cuadro 5. Datos cruzados Lecciones_Recod*Número de caso de clúster

		Conocimiento aceptable	Conocimiento por mejorar	Total
Lecciones_Recod	De 20 a 25 lecciones	1	1	2
	De 26 a 30 lecciones	1	3	4
	De 36 a 40 lecciones	2	7	9
	De 41 a 45 lecciones	3	5	8
	De 46 a 48 lecciones	1	6	7
Total		8	22	30

Cuadro 6. Datos cruzados Grado_Acád_Superior*Número de caso de clúster

		Conocimiento aceptable	Conocimiento por mejorar	Total
Grado_Acád_Superior	Bachiller	0	5	5
	Licenciado	7	15	22
	Master	1	2	3
Total		8	22	30

Cuadro 7. Datos cruzados Cant_Capacitaciones_Recod*Número de caso de clúster

		Conocimiento aceptable	Conocimiento por mejorar	Total
Cant_Capacitaciones _Recod	Docentes sin capacitación	3	6	9
	Docentes con alguna capacitación	5	16	21
Total		8	22	30

Cuadro 8. Datos cruzados Inst_Capacitacion*Número de caso de clúster

		Conocimiento aceptable	Conocimiento por mejorar	Total
Inst_Capacitacion	Solo del MEP	3	13	16
	Instituciones fuera del MEP	0	2	2
	Ambas	2	1	3
	NA	3	6	9
Total		8	22	30

Cuadro 9. Datos cruzados Años de servicio como docente recodificados*Número de caso de clúster

		Conocimiento aceptable	Conocimiento por mejorar	Total
Años de servicio como docente recodificados	menos de 10 años	0	4	4
	entre 11 y 20 años	5	13	18
	más de 20 años	3	5	8
Total		8	22	30

Cuadro 10. Datos cruzados Cantidad de años en el centro recodificados*Número de caso de clúster

		Conocimiento aceptable	Conocimiento por mejorar	Total
Cantidad de años en el centro recodificados	menos de 5 años	1	10	11
	entre 6 y 10 años	2	3	5
	entre 11 y 20 años	5	9	14
Total		8	22	30

Los resultados de las notas se observan a continuación.

Cuadro 11. Distribución de docentes de acuerdo con las preguntas sobre los fundamentos de los programas de estudio de Matemáticas

		Frecuencia	Porcentaje
Nota	.00	24	80,0
	1.00	6	20,0
	Total	30	100,0

Cuadro 12. Procesos matemáticos incluidos en los programas de estudio de Matemáticas

		Frecuencia	Porcentaje
Nota	.00	24	80,0
	1.00	6	20,0
	Total	30	100,0

Cuadro 13. Orientación del currículo de matemáticas costarricense

		Frecuencia	Porcentaje
Nota	.00	8	26,7
	1.00	22	73,3
	Total	30	100,0

Cuadro 14. Cuatro momentos para organizar la clase incluidos en los Programas de Estudios de Matemática

		Frecuencia	Porcentaje
Nota	.00	19	63,3
	1.00	11	36,7
	Total	30	100,0

Cuadro 15. Los niveles de complejidad de los problemas según los Programas de Estudios de Matemática costarricense

		Frecuencia	Porcentaje
Nota	.00	18	60,0
	1.00	12	40,0
	Total	30	100,0

8. Cuestionario docente: método de calificación

Al realizar los grupos, primeramente se procedió a construir una calificación total estandarizada (para obtener valores entre 0 y 10) con todos los indicadores de las notas que observamos en los cuadros del 11 al 15 del Anexo 7. Una vez obtenida la calificación se procede a realizar los clústeres con la información que proporciona esta.

Al observar las calificaciones obtenidas por los docentes de los diferentes clústeres (ver cuadro 1 y 2), se encuentra que hay una clara separación entre los docentes que obtienen “bajas” calificaciones y los que obtienen “altas” calificaciones.

Cuadro 1. Número de casos por clúster

		Frecuencia
Grupo	Conocimiento aceptable	8.000
	Conocimiento por mejorar	22.000
Total		30

Cuadro 2. Datos cruzados CalificaciónTotal*Número de caso de clúster

		Conocimiento aceptable	Conocimiento por mejorar	Total
Calificaciones totales	.00	0	2	2
	2.00	0	12	12
	4.00	0	8	8
	6.00	5	0	5
	8.00	1	0	1
	10.00	2	0	2
Total		8	22	30

Al calcular los Etas de asociación para los datos del cuadro 3 se obtiene un valor significativamente alto, por lo que en este caso si es adecuado utilizar la calificación total como variable indicadora del nivel de conocimiento de los docentes.

Cuadro 3. Medidas de asociación

	Eta	Eta cuadrada
CalificaciónTotal * Número de caso de clúster	.834	.695

9. Mediación pedagógica según grupo de docentes de colegios públicos

Cuadro 1. Porcentaje de tiempo utilizado por el estudiante de colegios públicos en las diferentes actividades según el grupo al que pertenece el docente

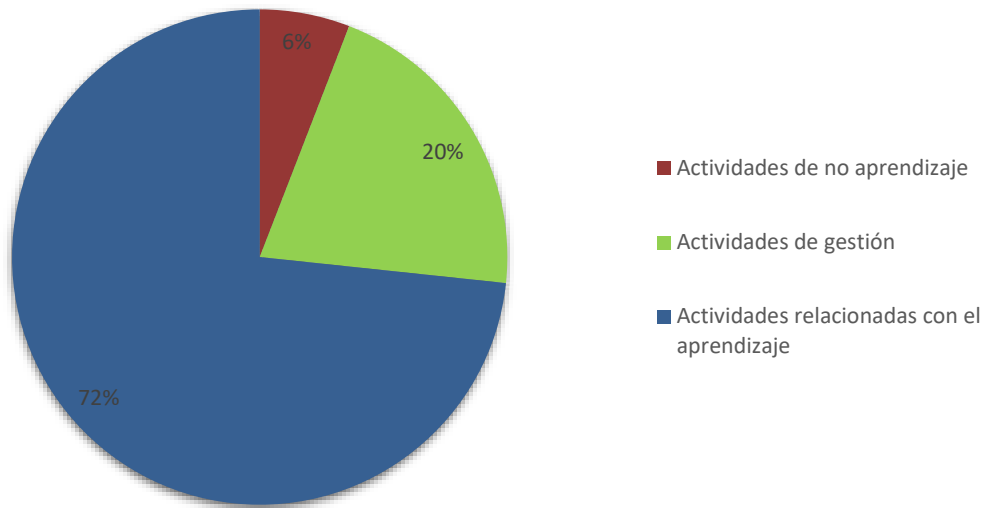
Actividad	Conocimiento aceptable	Conocimiento por mejorar
Plantea consultas sobre los contenidos	1%	1%
Resolución del Problema	3%	2%
Presta atención	34%	31%
Trabajo Prersonal	19%	12%
Resolución del Problema con apoyo docente	1%	0%
Resuelve Ejercicios matemáticos	29%	30%
Interacción social	5%	9%
No involucrado	7%	13%
Administración de la clase	0%	1%
Total	100%	100%

Cuadro 2. Porcentaje de tiempo utilizado por el docente de colegios públicos en las diferentes actividades según el grupo al que pertenece

Actividad	Conocimiento aceptable	Conocimiento por mejorar
Da indicaciones sobre la clase	3%	6%
Plantea un problema	2%	1%
Pregunta Dirigida	8%	8%
Monitorear el Trabajo Personal	13%	9%
Corrige los errores	0%	0%
Atiende consulta de los estudiantes	20%	20%
Exposición Magistral del Contenido	23%	22%
Realimenta a partir de las Consultas	1%	2%
Realimenta a partir del monitoreo	4%	3%
Realimenta a partir del error	3%	1%
Interacción social	1%	2%
No involucrado	0%	6%
Administración de la clase	21%	20%
Total	100%	100%

10. Distribución del tiempo por parte del docente de colegios públicos

Gráfico 1. Porcentaje de tiempo utilizado por el docente de colegios públicos según el tipo actividad



11. Datos de los colegios según modalidad y número de estudiantes

Cuadro 1. Colegios según modalidad y cantidad de estudiantes en lista de clase

Código de Colegio	Modalidad	Cantidad en lista	I Aplicación	II Aplicación
1	Privado	17	17	17
2	Público	29	24	
3	Público	24	24	9
4	Público	26	19	
5	Privado	16	15	11
6	Público	26	22	15
7	Público	34	28	
8	Privado	15	14	14
9	Público	27	24	24
10	Público	26	27	22
11	Público	24	22	18
12	Público	33	27	
13	Privado	16	16	14
14	Público	24	20	
15	Público	31	30	
16	Público	32	32	21
17	Público	23	20	
18	Público	22	24	
19	Público	29	26	
20	Público	18	15	
21	Público	22	25	
22	Público	35	31	
23	Público	35	37	
24	Público	30	23	
25	Público	29	30	
26	Público	38	24	
27	Público	19	20	
28	Público	37	36	18
29	Público	21	22	
30	Público	32	32	
31	Público	30	25	
32	Público	29	28	
33	Público	22	21	19
34	Privado	11	11	11
35	Público	24	20	
Total de estudiantes			830	196

Fuente: Elaboración propia a partir de las listas de secciones observadas

12. Comportamiento de las calificaciones de la prueba escrita de la I a la II aplicación obtenida por estudiantes de colegios públicos según sexo.

Cuadro 1. Comportamiento en el total y por área del cambio en la calificación de la prueba escrita en los 8 colegios públicos que realizaron ambas aplicaciones.

Código del Colegio	Sexo	Total de la prueba			Probabilidad y Estadística			Geometría			Relaciones y Álgebra		
		0	+	-	0	+	-	0	+	-	0	+	-
3	Hombre	0	2	1	1	1	1	0	2	1	1	1	1
	Mujer	1	5	0	2	3	1	3	2	1	2	3	1
9	Hombre	0	9	1	1	6	3	3	6	1	3	7	0
	Mujer	5	9	0	3	8	3	4	8	2	8	5	1
10	Hombre	1	5	2	4	3	1	0	3	5	3	5	0
	Mujer	2	10	2	4	7	3	2	7	5	4	9	1
11	Hombre	0	8	2	3	4	3	3	3	4	2	8	0
	Mujer	0	6	2	3	3	2	1	5	2	0	7	1
6	Hombre	2	1	3	1	1	4	3	1	2	3	1	2
	Mujer	2	3	4	3	1	5	3	4	2	1	3	5
16	Hombre	2	8	3	5	3	5	4	6	3	4	8	1
	Mujer	0	4	4	4	4	0	1	2	5	2	3	3
28	Hombre	3	3	1	1	3	3	3	3	1	1	3	3
	Mujer	3	5	3	5	5	1	4	1	6	6	4	1
33	Hombre	1	5	3	0	4	5	4	3	2	5	1	2
	Mujer	3	5	2	4	3	3	2	6	2	2	4	5

Fuente: Elaboración propia a partir de los resultados de la I y II aplicación de la prueba

0: No hubo cambio +: Aumentó -: Disminuyó

13. Análisis curricular completo de la prueba escrita

A continuación, se presenta el análisis curricular de los ítems que conformaron la prueba aplicada a los estudiantes en dos oportunidades durante este proceso de investigación. Para cada ítem se efectuó una revisión que consideraba cada uno de los siguientes aspectos:

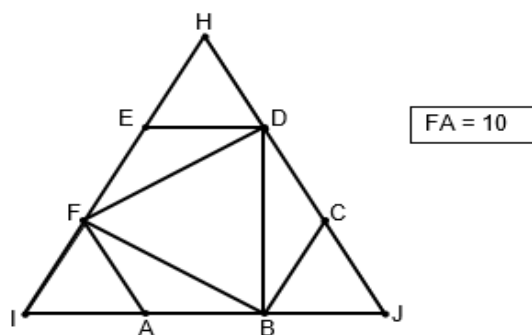
- Correspondencia entre habilidades generales y específicas.
- Identificación del área matemática y conocimientos incluidos.
- Participación de los procesos matemáticos según Ruiz (2017) aplicando 61 indicadores.
- Nivel de complejidad según Ruiz (2017).
- Otros elementos curriculares como: concordancia con el enfoque curricular y perspectiva del área matemática a la pertenece, uso de la contextualización activa, formulación y redacción del ítem, presencia de errores conceptuales y la integración de habilidades específicas (en caso de presencia).

Para constatar cada punto señalado previamente, se procedió a realizar la solución de cada ítem, se emplearon los procedimientos que eran de esperar por parte de la mayoría de los estudiantes, de acuerdo con la experiencia del equipo investigador.

Seguidamente, se presenta cada ítem, la solución y su correspondiente análisis curricular. Al finalizar este anexo se colocan los indicadores de Ruiz (2017), empleados para realizar el punto c y d.

Ítem 1

Considere la siguiente figura, que muestra el $\triangle DFB$, el hexágono regular $ABCDEF$ y el $\triangle HIJ$, para responder los ítems 1 y 2:



- 1) El perímetro del $\triangle HIJ$ es
- 60
 - 90
 - $25\sqrt{3}$
 - $225\sqrt{3}$

Solución ítem 1

Dado que el hexágono ABCDEF es regular, se tiene que $FA = AB = BC = CD = DE = EF = 10$

Por otro lado, como $\angle DCB$ es un ángulo interno del hexágono regular se tiene que $m\angle DCB = 120^\circ$ y entonces la $m\angle BCJ = 60^\circ$. De la misma manera dado que $m\angle ABC = 120^\circ$, se tiene que el $m\angle CBJ = 60^\circ$. Por tanto, el ΔCBJ es equilátero y $CJ = BJ = 10$.

Usando el mismo razonamiento, se deduce que los ΔEHD y ΔFIH son equiláteros, de donde $EH = HD = FI = AI = 10$.

Por tanto, $HI = HJ = IJ = 30$. De donde el perímetro del ΔHIJ es de 90 unidades lineales.

Respuesta correcta: opción B.

Análisis del ítem 1

Correspondencia entre habilidades generales y específicas

Se identifica la siguiente habilidad general:

- Calcular áreas y perímetros de polígonos (MEP, 2012, p. 385).

Por los elementos teóricos que se involucran en el ítem, las habilidades específicas a las que hace referencia son:

- Determinar la medida de perímetros y áreas de polígonos en diferentes contextos (MEP, 2012, p. 389)
- Determinar las medidas de los ángulos internos y externos de polígonos en diversos contextos (MEP, 2012, p. 389).
- Resolver problemas que involucren polígonos y sus diversos elementos (MEP, 2012, p. 389).

Hay una adecuada correspondencia entre la habilidad general y las habilidades específicas asociadas a este ítem.

Área incluida y conocimientos:

Geometría

Polígonos: lado, ángulos internos, perímetros, áreas

Participación de los procesos matemáticos:

Razonar y argumentar

Se debe identificar información matemática que no está dada en forma explícita (los ΔCBJ , ΔEHD y ΔFIH son equiláteros) que permite determinar la medida de HI, HJ y IJ. Indicadores RA2.1, RA2.2

Plantear y resolver problemas

La solución del problema involucra la utilización de fórmulas (ángulos internos en un hexágono regular) y convenciones elementales familiares para el estudiante (propiedades de los triángulos equiláteros). Indicador PRP1.1

Conectar

Se debe relacionar conceptos de una misma área (ángulos internos, lados y perímetro en un polígono regular). Indicador C1.2

Comunicar

Hay que identificar e interpretar la información matemática dada en la representación geométrica para buscar una estrategia de solución. Indicadores COM1.1, COM 1.2

Representar

Se debe identificar la información codificada en la representación geométrica suministrada. Indicador C2.1

Resumen de estructura de intervención de los procesos matemáticos:

RA2.1, RA2.2, PRP1.1, C1.2, COM1.1, COM 1.2, C2.1

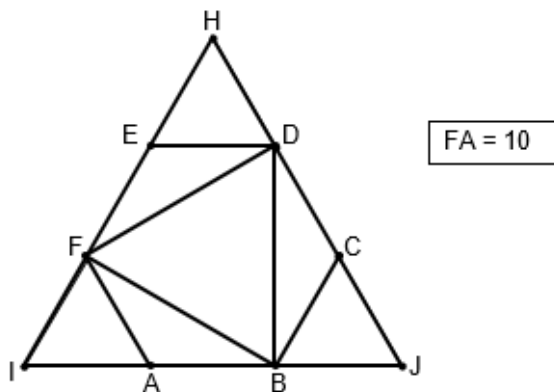
Nivel de complejidad: Reproducción (NC4)

Otros elementos curriculares:

1. Hay una adecuada relación entre lo que solicita el ítem y el área matemática de Geometría, sin embargo, no hay concordancia con el enfoque de resolución de problemas, la situación es abstracta.
2. Dado que el ítem corresponde a un contexto estrictamente matemático no hay contextualización activa.
3. La redacción del ítem es clara y se comprende cuál es la pregunta que se está formulando.
4. Existe una adecuada integración de habilidades específicas.
5. El nivel de complejidad del ítem corresponde a reproducción, se deben desarrollar procedimientos rutinarios siguiendo instrucciones directas.

Ítem 2

Considere la siguiente figura, que muestra el $\triangle DFB$, el hexágono regular $ABCDEF$ y el $\triangle HIJ$, para responder los ítems 1 y 2:



2) El área del $\triangle DFB$ es

- A) $30\sqrt{3}$
- B) $60\sqrt{3}$
- C) $75\sqrt{3}$
- D) $150\sqrt{3}$

Solución ítem 2

Para determinar la medida de cada lado del $\triangle DFB$

$$\text{sen } 60^\circ = \frac{x}{10}$$

$$x = 5\sqrt{3}$$

De donde, $DB = 10\sqrt{3}$. Siguiendo el mismo razonamiento $FD = FB = 10\sqrt{3}$. Por tanto, $\triangle FDB$ es equilátero.

El área del $\triangle FDB$, viene dada por $A = \frac{(10\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4} = \frac{300\sqrt{3}}{4} = 75\sqrt{3}$

Respuesta correcta: opción C

Análisis del ítem 2

Correspondencia entre habilidades generales y específicas

Se identifica la siguiente habilidad general:

- Calcular áreas y perímetros de polígonos (MEP, 2012, p. 385).

Por los elementos teóricos que se involucran en el ítem, las habilidades específicas a las que se hace referencia son:

- Determinar la medida de perímetros y áreas de polígonos en diferentes contextos (MEP, 2012, p. 389).
- Determinar las medidas de los ángulos internos y externos de polígonos en diversos contextos (MEP, 2012, p. 389).
- Resolver problemas que involucren polígonos y sus diversos elementos (MEP, 2012, p. 389).

Hay una adecuada correspondencia entre la habilidad general y las habilidades específicas asociadas a este ítem.

Área incluida y conocimientos:

Geometría

Polígonos: lado, diagonal, perímetros, áreas.

Participación de los procesos matemáticos

Razonar y argumentar

Se debe identificar información matemática que no está dada de manera explícita (el Δ FDB es equilátero). Se debe establecer una estrategia que permita hallar las medidas de los lados del Δ FDB. Indicadores RA2.1, RA2.2

Plantear y resolver problemas

Se debe aplicar trigonometría para hallar la medida de los lados del Δ FDB y luego aplicar la fórmula correspondiente para el cálculo del área del triángulo. Indicador PRP 1.2

Conectar

Se debe relacionar conceptos de una misma área (trigonometría y polígonos regulares). Indicador C1.2

Comunicar

Hay que identificar e interpretar la información matemática dada en la representación geométrica para buscar una estrategia de solución. Indicadores COM1.1, COM 1.2

Representar

Se debe identificar la información codificada en la representación geométrica suministrada. Indicador C2.1

Resumen de estructura de intervención de los procesos matemáticos:

RA2.1, RA2.2, PRP1.1, C1.2, COM1.1, COM 1.2, C2.1

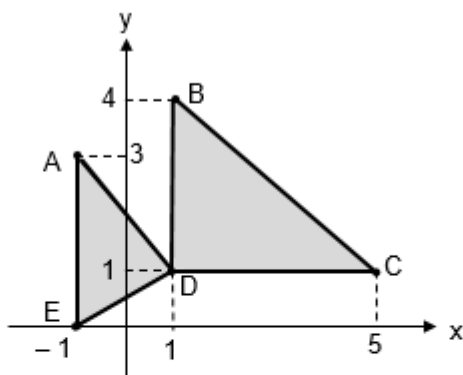
Nivel de complejidad: Reproducción (NC4)

Otros elementos curriculares:

1. Existe correspondencia entre el enfoque y el área matemática. Aunque no hay contextualización activa porque el ítem es un contexto estrictamente matemático, sí se cumple con ciertos aspectos relacionados con la habilidad que se desea evaluar. En el programa de estudios se promueve este tipo de habilidad en la forma que lo propone el ítem.
2. No hay contextualización activa.
3. El ítem evalúa apropiadamente las habilidades en las que está enmarcado.
4. No hay presencia de errores conceptuales.

Ítem 3

Considere la siguiente representación gráfica para responder los ítems 3:



3) El perímetro del $\triangle BCD$ es

- A) 6
- B) 12
- C) $9 + \sqrt{7}$
- D) $9 + \sqrt{41}$

Solución del ítem

De acuerdo a la información suministrada, se tiene que $DC = 4$ y $DB = 3$. Utilizando el teorema de Pitágoras se tiene que $BC = 5$.

Por lo tanto, el perímetro del $\triangle BCD$ corresponde a $4 + 3 + 5 = 12$.

Respuesta correcta: opción B.

Análisis del ítem 3

Correspondencia entre habilidades generales y específicas

Se identifica la siguiente habilidad general:

- Calcular áreas y perímetros de polígonos (MEP, 2012, p. 385).

Por los elementos teóricos que se involucran en el ítem, las habilidades específicas a las que hace referencia el ítem son:

- Calcular perímetros y áreas de polígonos no regulares utilizando un sistema de coordenadas rectangulares (MEP, 2012, p. 389).
- Resolver problemas que involucren polígonos y sus diversos elementos (MEP, 2012, p. 389).

Hay una adecuada correspondencia entre la habilidad general y las habilidades específicas asociadas a este ítem.

Área incluida y conocimientos:

Geometría
Polígonos: Perímetros

Participación de los procesos matemáticos:

Razonar y argumentar

Se debe identificar información dada en forma explícita (longitud de los lados del $\triangle BCD$) y luego aplicar el Teorema de Pitágoras para hallar la medida del tercer lado. Indicador RA1.1, RA1.2

Plantear y resolver problemas

Los datos necesarios para determinar el perímetro del $\triangle BCD$ están dados de manera explícita y son sencillos. Indicadores PRP1.1, PRP1.1

Conectar

Se debe relacionar conceptos de una misma área (Teorema de Pitágoras y perímetros). Indicador C1.2

Comunicar

Hay que identificar e interpretar la información matemática dada en la representación geométrica para buscar una estrategia de solución. Indicadores COM1.1, COM 1.2

Representar

Se debe identificar la información que está dada en la representación geométrica y se debe utilizar una única representación. Indicadores R1.1, R1.2

Resumen de estructura de intervención de los procesos matemáticos:

RA1.1, RA1.2, PRP1.1, PRP1.1, C1.2, COM1.1, COM 1.2, R1.1, R1.2

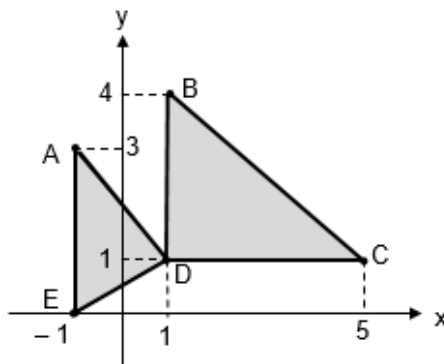
Nivel de complejidad: Reproducción (NC1)

Otros elementos curriculares:

1. El enfoque del ítem tiene un acercamiento limitado al enfoque del área; de acuerdo a las indicaciones puntuales (MEP, 2012, p. 390) se sugiere utilizar polígonos irregulares que puedan ser descompuestos en triángulos.
2. No hay contextualización activa.
3. El ítem no evalúa apropiadamente las habilidades en las que está enmarcado.
4. No hay presencia de errores conceptuales.

Ítem 4

Considere la siguiente representación gráfica para responder los ítems 4:



4) ¿Cuál es el área del $\triangle ADE$?

- A) 2
- B) 3
- C) $\frac{3}{2}$
- D) 6

Solución del ítem

Considere $AE = 3$ como la base del $\triangle AED$ y la altura $h = 2$. El área del $\triangle AED$ viene dada por,

$$A = \frac{3 \cdot 2}{2} = 3$$

Respuesta correcta: opción B

Análisis del ítem 4

Correspondencia entre habilidades generales y específicas

Se identifica la siguiente habilidad general:

- Calcular áreas y perímetros de polígonos (MEP, 2012, p. 385).

Por los elementos teóricos que se involucran en el ítem, las habilidades específicas a las que hace referencia son:

- Calcular perímetros y áreas de polígonos no regulares utilizando un sistema de coordenadas rectangulares (MEP, 2012, p. 389).
- Resolver problemas que involucren polígonos y sus diversos elementos (MEP, 2012, p. 389).

Hay una adecuada correspondencia entre la habilidad general y las habilidades específicas asociadas a este ítem.

Área incluida y conocimientos:

Geometría
Polígonos: Áreas

Participación de los procesos matemáticos:

Razonar y argumentar

Se debe identificar información matemática que no está dada de manera explícita (longitud de la base y la altura del Δ AED). Indicador RA2.1

Plantear y resolver problemas

Se requiere la visualización de la base y la altura del triángulo, para luego aplicar la fórmula del área. Indicadores PRP1.1, PRP1.2

Conectar

Este proceso no está presente. No se establecen conexiones entre conocimientos de la misma área (se trabaja únicamente el concepto de área), tampoco existen conexiones entre diferentes áreas o disciplinas.

Comunicar

Hay que identificar e interpretar la información matemática dada en la representación geométrica para buscar una estrategia de solución. Indicadores COM1.1, COM 1.2

Representar

Se deben identificar datos presentes en forma explícita en la representación geométrica.
Indicadores R1.1, R1.2

Resumen de estructura de intervención de los procesos matemáticos:

RA2.1, PRP1.1, PRP1.2, COM1.1, COM 1.2, R1.1, R1.2

Nivel de complejidad: Reproducción (NC1)

Otros elementos curriculares:

1. Existe correspondencia entre el enfoque y el área matemática. Aunque no hay contextualización activa porque el ítem es un contexto estrictamente matemático, sí se cumple con ciertos aspectos relacionados con la habilidad que se desea evaluar. En el programa de estudios se promueve este tipo de habilidad en la forma que lo propone el ítem.
2. No hay contextualización activa.
3. El ítem evalúa apropiadamente las habilidades en las que está enmarcado.
4. No hay presencia de errores conceptuales.

Ítem 5

5) Considere la siguiente información:

x	9	7	k	4	3	0
f(x)	4	11	6	1	0	2

Para que la tabla anterior corresponda a la representación tabular de una función, un posible valor de "k" es

- A) 0
- B) 1
- C) 7
- D) 9

Solución del ítem 5

Para que la relación sea una función cada preimagen debe estar relacionada con una única imagen:

- Si se toma $x = 0$, el 0 tendrá dos imágenes (2 y 6) y la relación no es una función.
- Si se toma $x = 7$, el 7 tendrá dos imágenes (11 y 6) y la relación no es una función.

- Si se toma $x = 9$, el 9 tendrá dos imágenes (4 y 6) y la relación no es una función.
- Por último, si $x = 1$ cada una de las preimágenes tendrá una única imagen y la relación puede ser considerada una función.

Respuesta correcta: opción B.

Análisis del ítem 5

Correspondencia entre habilidades generales y específicas

Se identifica la siguiente habilidad general:

- Aplicar el concepto de función en diversas situaciones (MEP, 2012, p. 405).

Por los elementos teóricos que se involucran en el ítem, la habilidad específica a la que hace referencia es:

- Identificar si una relación dada en forma tabular, simbólica o gráfica corresponde a una función (MEP, 2012, p. 406).

Hay una adecuada correspondencia entre la habilidad general y la habilidad específica asociada a este ítem.

Área incluida y conocimientos:

Relaciones y álgebra.

Funciones: Concepto de función y de gráfica de una función

Participación de los procesos matemáticos:

Razonar y argumentar

Se debe efectuar un razonamiento directo (determinar cuál valor puede ser parte del dominio de la función) a partir de la información dada en la tabla. Indicador RA 1.4

Plantear y resolver problemas

Este proceso no está presente. No hay que efectuar ningún procedimiento, la respuesta se deduce directamente de los datos suministrados en la tabla.

Conectar

Se conecta el concepto de función, dominio, ámbito, imágenes y preimágenes. Indicador C1.2

Comunicar

Hay que identificar e interpretar la información matemática dada en la tabla para buscar una estrategia de solución. Indicadores COM1.1, COM 1.2

Representar

Se deben identificar los datos presentes en la tabla y utilizarlos para brindar la respuesta. Indicadores R1.1, R1.2

Resumen de estructura de intervención de los procesos matemáticos:

RA 1.4, C1.2, COM1.1, COM 1.2, R1.1, R1.2

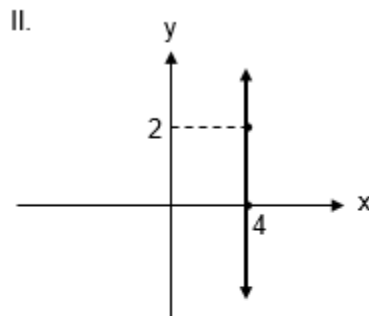
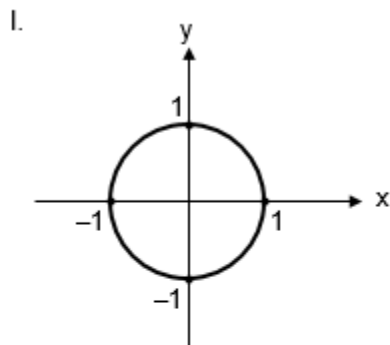
Nivel de complejidad: Reproducción (NC1)

Otros elementos curriculares:

1. Existe una clara correspondencia con la habilidad específica correspondiente, sin embargo no con la habilidad general pues no se está aplicando el concepto de función, solamente se desea determinar si las relaciones son funciones o no.
2. Este ítem si coincide con lo planteado en los programas de matemáticas, particularmente con lo que se pide en las habilidades para determinar si una relación es o no una función.
3. Existe un contexto matemático claramente definido en el ítem.

Ítem 6

6) Considere las siguientes representaciones gráficas:



De acuerdo con la información anterior, ¿cuál o cuáles representaciones gráficas corresponden a una función?

- A) Ambas
- B) Ninguna
- C) Solo la I
- D) Solo la II

Solución del ítem 6

Proposición I: Note que para $x = 0$ se tiene dos imágenes 1 y -1. Por lo tanto, la gráfica I no corresponde a una función.

Proposición II: Note que la cantidad de imágenes de $x = 4$ es infinita. Por lo tanto, la gráfica II no corresponde a una función.

Respuesta correcta: opción B

Análisis del ítem 6

Correspondencia entre habilidades generales y específicas

Se identifica la siguiente habilidad general:

- Aplicar el concepto de función en diversas situaciones (MEP, 2012, p. 405).

Por los elementos teóricos que se involucran en el ítem, la habilidad específica a la que hace referencia es:

- Identificar si una relación dada en forma tabular, simbólica o gráfica corresponde a una función. (MEP, 2012, p. 406)

Hay una adecuada correspondencia entre la habilidad general y la habilidad específica asociada a este ítem.

Área incluida y conocimientos:

Relaciones y álgebra.

Funciones: Concepto de función y de gráfica de una función.

Participación de los procesos matemáticos:

Razonar y argumentar

Se debe efectuar un razonamiento directo (identificar cuál gráfica corresponde a una función) Indicador RA 1.4

Plantear y resolver problemas

Este proceso no está presente. No hay que efectuar ningún procedimiento, la respuesta se deduce directamente de los datos suministrados en las gráficas.

Conectar

Se conecta el concepto de función con el análisis de gráficas. Indicador C1.2

Comunicar

Hay que identificar e interpretar la información matemática dada en la gráfica para buscar una estrategia de solución. Indicadores COM1.1, COM 1.2

Representar

Se deben identificar los datos presentes en la representación gráfica. Indicadores R1.1

Resumen de estructura de intervención de los procesos matemáticos:

RA 1.4, C1.2, COM1.1, COM 1.2, R1.1,

Nivel de complejidad: Reproducción (NC1)

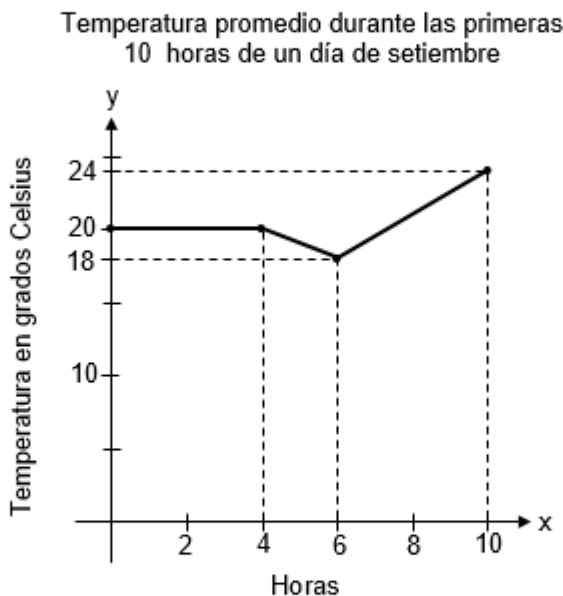
Otros elementos curriculares:

1. Existe correspondencia entre el enfoque y el área matemática. Aunque no hay contextualización activa porque el ítem es un contexto estrictamente matemático, sí se cumple con ciertos aspectos relacionados con la habilidad que se desea evaluar.
2. No hay contextualización activa.
3. El ítem evalúa apropiadamente las habilidades en las que está enmarcado.
4. No hay presencia de errores conceptuales.

Ítem 7

Considere la siguiente información para responder los ítems 7 y 8:

La siguiente gráfica representa la temperatura promedio, por horas, de un día de setiembre, de acuerdo con una de las estaciones meteorológicas automáticas del Instituto Meteorológico Nacional de Costa Rica.



Fuente: Adaptado de <http://www.imn.ac.cr>

- 7) Un intervalo del tiempo en el cual aumentó la temperatura corresponde a
- A) [2, 6]
 - B) [4, 6]
 - C) [0, 4]
 - D) [6, 8]

Solución del ítem 7

Al observar la gráfica dada en el ítem, la función representa es creciente en el intervalo [6,10]. Debido a lo anterior de acuerdo a las opciones la correcta es [6,8].

Respuesta correcta: opción D

Análisis del ítem 7

Correspondencia entre habilidades generales y específicas

Se identifican las siguientes habilidades generales:

- Utilizar elementos del lenguaje de los conjuntos numéricos para representar dominio y rango de funciones, así como el conjunto solución de ecuaciones (MEP, 2012, p. 405).
- Utilizar distintas representaciones de algunas funciones algebraicas y trascendentes (MEP, 2012, p. 405).

Por los elementos teóricos que se involucran en el ítem, la habilidad específica a la que hace referencia es:

- Analizar una función a partir de sus representaciones (MEP, 2012, p. 408).

Área incluida y conocimientos:

Relaciones y álgebra.
Conjuntos numéricos: intervalos.

Participación de los procesos matemáticos:

Razonar y argumentar

Se debe identificar información dada de manera explícita en la representación gráfica suministrada y responder preguntas donde la información está dada de manera explícita. Indicador RA1.1, RA1.4

Plantear y resolver problemas

No está presente este proceso. No hay que efectuar ningún procedimiento, la respuesta se deduce directamente de los datos suministrados en la representación gráfica.

Conectar

Existe una conexión con una situación de la vida real y un concepto matemático. Indicador C1.1

Comunicar

Hay que identificar e interpretar la información matemática dada en la gráfica para buscar una estrategia de solución. Indicadores COM1.1, COM 1.2

Representar

Se debe identificar los datos que están presentes en la representación gráfica. Indicador R1.1

Resumen de estructura de intervención de los procesos matemáticos:

RA 1.1, RA1.4, C1.1, COM1.1, COM 1.2, R1.1,

Nivel de complejidad: Reproducción (NC1)

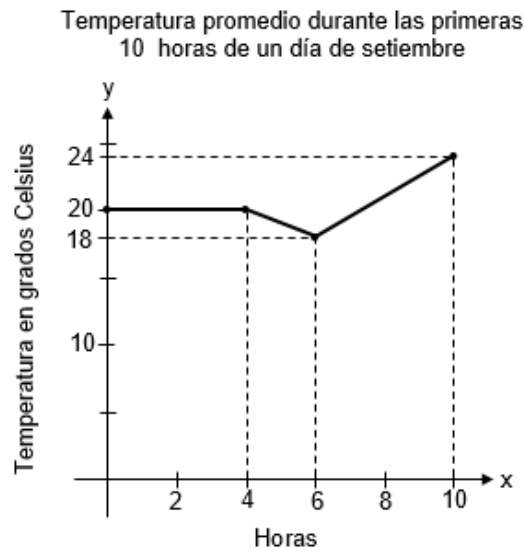
Otros elementos curriculares:

1. Existe una clara correspondencia tanto con la habilidad específica, como la habilidad general correspondiente.
2. Este ítem coincide con lo planteado en los programas de matemáticas, ya que se da una función (en su representación gráfica) que modela una situación real.
3. Si existe una contextualización activa en el ítem, pues se presenta una información real sobre la temperatura promedio durante las primeras 10 horas de un día de setiembre, provocando un interés en el estudiantado al abordar entornos más cercanos a la vida.
4. El ítem no presenta errores conceptuales, ni de redacción.

Ítem 8

Considere la siguiente información para responder los ítems 7 y 8:

La siguiente gráfica representa la temperatura promedio, por horas, de un día de setiembre, de acuerdo con una de las estaciones meteorológicas automáticas del Instituto Meteorológico Nacional de Costa Rica.



Fuente: Adaptado de <http://www.imn.ac.cr>

- 8) ¿Cuál fue la temperatura promedio, en grados Celsius, registrada a las 6 horas?
- A) 6
 - B) 10
 - C) 18
 - D) 20

Solución del ítem 8

De acuerdo a la información que proporciona la representación gráfica, se debe determinar la imagen de 6 que en este caso corresponde a 18° .

Respuesta: opción C

Análisis del ítem 8

Correspondencia entre habilidades generales y específicas

Se identifica la siguiente habilidad general:

- Utilizar distintas representaciones de algunas funciones algebraicas y trascendentes (MEP, 2012, p. 405).

Por los elementos teóricos que se involucran en el ítem, la habilidad específica a la que hace referencia es:

- Evaluar el valor de una función dada en forma gráfica o algebraica, en distintos puntos de su dominio (MEP, 2012, p. 405).

Área incluida y conocimientos:

Relaciones y álgebra.

Funciones: Elementos para el análisis de una función (dominio, preimágenes, imágenes, gráfica)

Participación de los procesos matemáticos:

Razonar y argumentar

Se debe identificar la información explícita dada en la representación gráfica suministrada y responder una pregunta donde la información está dada en el enunciado (cuál es la temperatura promedio...) Indicadores RA1.1; RA1.4

Plantear y resolver problemas

Este proceso no está presente. No hay que efectuar ningún procedimiento, la respuesta se deduce directamente de los datos suministrados en la representación gráfica.

Conectar

Se establece la conexión de conceptos matemáticos al evaluar el valor de una función en forma gráfica (dominio, preimagen, imagen, gráfica) y una situación de contexto real. Indicador C1.1

Comunicar

Se debe identificar e interpretar la información dada en la gráfica suministrada, para poder realizar el proceso de solución. Indicadores COM 1.1, COM1.2

Representar

Se debe identificar los datos que están presentes en la representación gráfica (preimagen e imagen). Indicador R1.1

Resumen de estructura de intervención de los procesos matemáticos:

RA 1.1, RA1.4, C1.1, COM1.1, COM 1.2, R1.1,

Nivel de complejidad: Reproducción (NC1)

Otros elementos curriculares:

1. Existe una clara correspondencia con la habilidad específica correspondiente. También con la habilidad general ya que se aplica el concepto de imagen de una función en una situación de contexto.
2. Este ítem coincide con lo planteado en los programas de matemáticas, ya que se da una función (en su representación gráfica) que modela una situación real.
3. Si existe una contextualización activa en el ítem, pues se presenta una información real sobre la temperatura promedio durante las primeras 10 horas de un día de setiembre, provocando un interés en el estudiantado al abordar entornos más cercanos a la vida cotidiana
4. El ítem no presenta errores conceptuales, ni de redacción.

Ítem 9

9) Considere la siguiente información:

Sea f una función cuadrática, tal que, su gráfica interseca el "eje y " en $(0, 3)$ y su vértice es $(2, 9)$.

De acuerdo con la información anterior, considere las siguientes proposiciones:

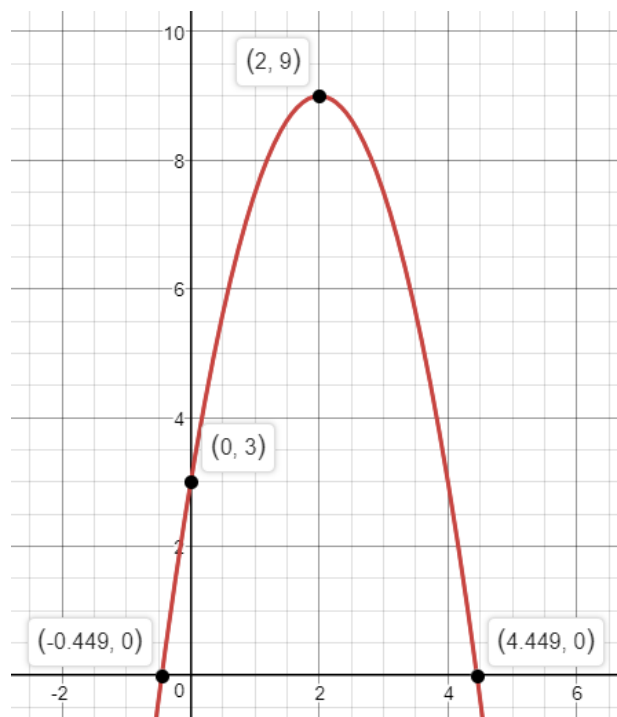
- I. Un intervalo en el cual f es decreciente es $]3, +\infty[$.
- II. La gráfica de f interseca el "eje x " en dos puntos diferentes.

De ellas, ¿cuál o cuáles son **verdaderas**?

- A) Ambas
- B) Ninguna
- C) Solo la I
- D) Solo la II

Solución del ítem 9

De acuerdo a la información brindada se tiene que el vértice de la función cuadrática es $(2,9)$ y la intersección en el eje " y " es $(0,3)$ de donde se obtiene la siguiente gráfica:



Proposición I.

Note que de acuerdo a la representación gráfica, que la función es decreciente en el intervalo $]2, +\infty[$. Por lo tanto, esta proposición es falsa.

Proposición II.

Note que de acuerdo a la representación gráfica que la función interseca al eje x en dos puntos. Por lo tanto, esta proposición es verdadera.

Respuesta correcta: opción D.

Otra solución consiste en obtener el criterio de la función y realizar el análisis correspondiente:

$$f(x) = \frac{-3}{2}x^2 + 6x + 3$$

Análisis del ítem 9

Correspondencia entre habilidades generales y específicas

Se identifica la siguiente habilidad general:

- Utilizar distintas representaciones de algunas funciones algebraicas y trascendentes (MEP, 2012, p. 405).

Por los elementos teóricos que se involucran en el ítem, la habilidad específica a la que hace referencia es:

- Analizar gráfica y algebraicamente la función cuadrática con criterio $f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$ (MEP, 2012, p. 411).

Área incluida y conocimientos:

Relaciones y álgebra.
Función cuadrática

Participación de los procesos matemáticos:

Razonar y argumentar

Se debe interpretar la información matemática suministrada sobre la función cuadrática (vértice e intersección con el eje y), para establecer una estrategia de solución. Dicha

estrategia involucra construir la representación gráfica o algebraica de la función f .
Indicadores RA2.3, RA2.4

Plantear y resolver problemas

Se debe a partir de los puntos dados de la función f construir la representación gráfica o algebraica. Indicadores PRP1.4, PRP1.5

Conectar

Se establece la conexión de conceptos matemáticos al pasar a otra representación (gráfica o algebraica) a partir de los puntos dados (vértice e intersección con el eje y).
Indicador C1.2

Comunicar

Hay que identificar e interpretar la información suministrada para establecer una estrategia de solución. Indicadores COM1.1 COM 1.2

Representar

Se debe interpretar y razonar sobre la información codificada (vértice e intersección con el eje) para elaborar otra representación matemática de la función f (gráfica o algebraica)
Indicadores R2.1, R2.2, R2.4

Resumen de estructura de intervención de los procesos matemáticos:

RA2.3, RA2.4, PRP1.4, PRP1.5, C1.2, COM1.1 COM 1.2, R2.1, R2.2, R2.4

Nivel de complejidad: Conexión (NC2)

Otros elementos curriculares:

1. Existe una clara correspondencia tanto con la habilidad específica, como la habilidad general correspondiente.
2. El contexto es matemático y no hay presencia de contextualización activa
3. El ítem no presenta errores conceptuales, ni de redacción.

Ítem 10

10) Considere la siguiente información:

En una actividad, el valor de 10 entradas para adulto y 9 para niño es ₡51 200 y el valor de 15 entradas para adulto y 17 para niño es ₡83 100.

De acuerdo con la información anterior, si cada entrada para adulto tiene el mismo valor y cada entrada para niño tiene el mismo valor, entonces el valor, en colones, de una entrada para niño es

- A) 1800
- B) 2633
- C) 2695
- D) 3300

Solución del ítem 10

Considere a “x” como el valor de las entradas de adulto y “y” el valor de las entradas de niño. Se tiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 10x + 9y = 51200 \\ 15x + 17y = 83100 \end{cases}$$

De donde $x = 3500$ y $y = 1800$. El valor de una entrada para niño es de 1800 colones.

Respuesta correcta: opción A

Análisis del ítem 10

Correspondencia entre habilidades generales y específicas

Se identifica la siguiente habilidad general:

- Plantear y resolver problemas a partir de una situación dada (MEP, 2012, p. 405).

Por los elementos teóricos que se involucran en el ítem, la habilidad específica a la que hace referencia es:

- Plantear y resolver problemas en contextos reales, utilizando sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas (MEP, 2012, p. 412).

Área incluida y conocimientos:

Relaciones y álgebra.
Funciones: Función lineal

Participación de los procesos matemáticos:

Razonar y argumentar

Se debe identificar la información dada de manera explícita para construir el sistema de ecuaciones, luego se debe aplicar un algoritmo conocido para encontrar la solución. Indicadores RA1.1, RA1.2, RA1.4

Plantear y resolver problemas

Se debe aplicar un procedimiento conocido para establecer las ecuaciones necesarias y luego aplicar un algoritmo conocido. PRP1.1, PRP1.2

Conectar

Este proceso no está presente. No se establecen conexiones entre conocimientos de la misma área (se trabaja únicamente el tema de sistema de ecuaciones), tampoco existen conexiones entre diferentes áreas o disciplinas.

Comunicar

Se identificar e interpretar en el enunciado la información necesaria para construir el sistema de ecuaciones. Indicadores COM1.1, COM1.2

Representar

Se identifican datos presentes de forma explícita y se utiliza una única representación (algebraica). Indicadores R1.1, R1.2

Resumen de estructura de intervención de los procesos matemáticos:

RA1.1, RA1.2, RA1.4, PRP1.1, PRP1.2, COM1.1, COM1.2, R1.1, R1.2

Nivel de complejidad: Reproducción (NC1)

Otros elementos curriculares:

1. El ítem plantea un contexto donde es necesario utilizar un sistema de ecuaciones por lo que existe una clara correspondencia con la habilidad específica y general correspondiente.
2. Este ítem coincide con lo planteado en los programas de matemáticas. Se plantea un contexto donde se utiliza un sistema de ecuaciones.

3. Si hay contextualización en el ítem, sin embargo, el contexto es artificial, cuando se compra una entrada se conoce el precio de venta unitario así que no tiene sentido utilizar un sistema de ecuaciones para conocer dicho precio de venta.
4. Este ítem es de reproducción, ya que se dan los datos explícitamente, el estudiante debe plantear el sistema de ecuaciones y desarrollar un algoritmo rutinario.

Ítem 11

- 11) Considere la siguiente información, la cual hace referencia a las temperaturas promedio, en grados Celsius ($^{\circ}\text{C}$), registradas en la estación meteorológica ubicada en el Aeropuerto Internacional Juan Santamaría, durante los meses de marzo desde el año 2006 al 2014.

Temperatura promedio marzo 2006 – 2014

Año	Temperatura promedio 2006 – 2014
2006	24,2
2007	24,9
2008	23,8
2009	23,8
2010	25,2
2011	23,9
2012	24,3
2013	23,4
2014	23,2

Fuente: Adaptado del Compendio Ambiental 2015 del Estado de la Nación

De acuerdo con la información anterior, considere las siguientes proposiciones:

- I. La temperatura promedio más usual fue de $23,8^{\circ}\text{C}$.
- II. El 50% de los datos de las temperaturas promedio fue mayor o igual que $25,2^{\circ}\text{C}$.

De ellas, ¿cuál o cuáles son verdaderas?

- A) Ambas
- B) Ninguna
- C) Solo la I
- D) Solo la II

Solución del ítem 11

Proposición I: La moda de los datos es 23,8. Por lo tanto, la proposición es verdadera.

Proposición II: Se ordenan los datos

23,2 – 23,4 – 23,8 – 23,8 – 23,9 – 24,2 – 24,3 – 24,9 – 25,2

La mediana de los datos corresponde a 23,9. Por lo tanto, la proposición es falsa.

Respuesta correcta: opción C

Análisis del ítem 11

Correspondencia entre habilidades generales y específicas

Se identifica la siguiente habilidad general:

- Utilizar las medidas de posición para resumir y analizar la información proveniente de un grupo de datos cuantitativos (MEP, 2012, p. 431).

Por los elementos teóricos que se involucran en el ítem, la habilidad específica a la que hace referencia es:

- Resumir un grupo de datos mediante el uso de la moda, la media aritmética, la mediana, los cuartiles, el máximo y el mínimo, e interpretar la información que proporcionan dichas medidas (MEP, 2012, p. 432).

Área incluida y conocimientos:

Estadística

Medidas de posición: moda y mediana.

Participación de los procesos matemáticos:

Razonar y argumentar

Se debe identificar la información que está dada de manera explícita y responde a preguntas directas aplicando procedimientos sencillos (determinación de la mediana).

Indicadores RA1.1, RA1.1, RA1.3

Plantear y resolver problemas

Se debe identificar la moda en la primera proposición y realizar un procedimiento sencillo y familiar en la segunda para determinar la mediana de los datos. Indicadores PRP1.1, PRP1.2

Conectar

Se conectan los conceptos de moda y mediana a una situación de contexto real. Indicador C1.1

Comunicar

Se debe identificar e interpretar en el enunciado la información necesaria para determinar la moda y la mediana. Indicadores COM1.1, COM1.2

Representar

Se deben identificar los datos presentes en una única representación tabular. Indicador R1.1

Resumen de estructura de intervención de los procesos matemáticos:

RA1.1, RA1.1, RA1.3, PRP1.1, PRP1.2, C1.1, COM1.1, COM1.2, R1.1

Nivel de complejidad: Reproducción (NC1)

Otros elementos curriculares:

1. Hay cierta concordancia entre la habilidad general, las habilidades específicas y el ítem. Se solicita la moda y la mediana que resume los datos que se encuentran en la tabla, sin embargo, no se va más allá (no hay un análisis o interpretación de las medidas estadísticas).
2. Existe un contexto real, pero no hay contextualización activa. Se puede omitir el contexto y de igual forma se puede contestar el ítem. Los datos no tienen un sentido, no hay presencia de ¿para qué?.
3. No hay correspondencia con el área de Estadística y Probabilidad. El ítem no se refiere a la resolución de un problema, sino al cálculo aritmético de medidas estadísticas. La Estadística es mucho más que procedimientos algorítmicos; es una disciplina cuyo objetivo consiste en describir, interpretar y poner en contexto los patrones de variabilidad de la información que se generan alrededor de un problema.

Ítem 12

12) Considere la siguiente información:

Precio, en dólares, por galón de combustible en seis países de América Central al 12 de setiembre del 2016

País	Diésel	Gasolina Regular	Gasolina Súper
A	2,36	2,77	2,90
B	2,28	2,79	2,99
C	2,72	3,23	3,45
D	2,83	3,41	3,49
E	3,00	3,67	3,84
F	2,25	2,65	2,73

Fuente: Adaptado de <http://www.centralamericadata.com>

De acuerdo con la información anterior, considere las siguientes proposiciones:

- I. La mayor diferencia de los precios de la gasolina regular es \$0,27 más baja que la mayor diferencia de los precios de la gasolina súper.
- II. El precio, en dólares, por galón del diésel en el país C es mayor que el promedio de los precios, en dólares, del diésel en esos seis países de América Central.

De ellas, ¿cuál o cuáles son verdaderas?

- A) Ambas
- B) Ninguna
- C) Solo la I
- D) Solo la II

Solución del ítem 12

Proposición I:

Diferencia de los precios de la gasolina regular: $3,67 - 2,65 = 1,02$

Diferencia de precios de la gasolina súper: $3,84 - 2,73 = 1,11$

Diferencia entre las diferencias: $1,11 - 1,02 = 0,09$

La proposición es falsa.

Proposición II:

Precio por galón del diésel en el país C: 2,72

Promedio precio del diésel: $\frac{2,36+2,28+2,72+2,83+3,00+2,25}{6} = \frac{15,44}{6} = 2,57$

La proposición es verdadera.

Respuesta correcta: opción D

Análisis del ítem 12

Correspondencia entre habilidades generales y específicas

La proposición I no tiene relación alguna con ninguna habilidad general o específica del programa de estudios de matemáticas vigente.

Se identifica la siguiente habilidad general para la proposición II:

- Utilizar las medidas de posición para resumir y analizar la información proveniente de un grupo de datos cuantitativos (MEP, 2012, p. 431).

Por los elementos teóricos que se involucran en el ítem, la habilidad específica a la que hace referencia la proposición II es:

- Resumir un grupo de datos mediante el uso de la moda, la media aritmética, la mediana, los cuartiles, el máximo y el mínimo, e interpretar la información que proporcionan dichas medidas (MEP, 2012, p. 432).

Área incluida y conocimientos:

Estadística

Medidas de posición: media aritmética.

Participación de los procesos matemáticos:

Razonar y argumentar

Se debe identificar la información dada de manera explícita en la tabla y calcular la media aritmética y establecer comparaciones. Indicadores RA1.1, RA1.2, RA1.4

Plantear y resolver problemas

Se debe aplicar un algoritmo conocido para calcular la media aritmética a partir de los datos dados de manera explícita en la tabla. Indicadores PRP1.1, PRP1.2

Conectar

Se conectan el concepto de media aritmética a una situación de contexto real. Indicador C1.1

Comunicar

Se debe identificar e interpretar en el enunciado la información necesaria para determinar la media aritmética. Indicadores COM1.1, COM1.2

Representar

Se deben identificar los datos presentes en una única representación tabular. Indicador R1.1

Resumen de estructura de intervención de los procesos matemáticos:

RA1.1, RA1.2, RA1.4, PRP1.1, PRP1.2, C1.1, COM1.1, COM1.2, R1.1

Nivel de complejidad: Reproducción (NC1)

Otros elementos curriculares:

1. No existe una adecuada correspondencia del ítem con la habilidad general y la habilidad específica debido a errores de formulación del ítem (proposición I no corresponde con ninguna habilidad del programa de estudios).
2. El ítem no se ajusta al enfoque del área de Estadística y Probabilidad. Además hay errores en la formulación del ítem. En la primera proposición la redacción es confusa y poco precisa, no tiene relación alguna con las habilidades que se pretenden medir. Lo mismo sucede con la proposición II donde no es claro la razón de la comparación de un promedio con un valor de la tabla.
3. No hay contextualización activa. Simplemente el ítem evalúa el cálculo del promedio, no existe una interpretación con respecto al contexto suministrado.

Ítem 13

Considere la siguiente situación para responder los ítems 13 y 14:

Se tiene un dado de seis caras, cada una de ellas con un número diferente del 1 al 6 y otro dado de ocho caras, cada una de ellas con un número diferente del 1 al 8. Al lanzar estos dados, cada cara de cada dado tiene la misma probabilidad de quedar en la parte superior.

Se definen los siguientes eventos:

- Evento A: Obtener en la parte superior un número mayor que 3.
- Evento B: Obtener en la parte superior el número 5.
- Evento C: Obtener en la parte superior un número menor o igual que 7.
- Evento D: Obtener en la parte superior un número par.

Para cada uno de los eventos se puede lanzar el dado de seis caras o el de ocho caras.

13) Considere las siguientes proposiciones:

- I. La probabilidad de que ocurra el evento A, es mayor si se lanza el dado de ocho caras.
- II. La probabilidad de que ocurra el evento B, es mayor si se lanza el dado de seis caras.

De ellas, ¿cuál o cuáles son **verdaderas**?

- A) Ambas
- B) Ninguna
- C) Solo la I
- D) Solo la II

Solución del ítem 13

Proposición I: Probabilidad del evento A

$$\text{Dado 6 caras} = \frac{3}{6}$$

$$\text{Dado 8 caras} = \frac{5}{8}$$

Por lo tanto, la proposición es verdadera.

Proposición II: Probabilidad del evento A

$$\text{Dado 6 caras} = \frac{1}{6}$$

$$\text{Dado 8 caras} = \frac{1}{8}$$

Por lo tanto, la proposición es verdadera.

Respuesta correcta: opción A

Análisis del ítem 13

Correspondencia entre habilidades generales y específicas

Se identifica la siguiente habilidad general:

- Emplear las propiedades básicas de la probabilidad en situaciones concretas (MEP, 2012, p. 431).

Por los elementos teóricos que se involucran en el ítem, la habilidad específica a la que hace referencia es:

- Aplicar los axiomas y propiedades básicas de probabilidades en la resolución de problemas e interpretar los resultados generados (MEP, 2012, p. 436).

Área incluida y conocimientos:

Probabilidad.

Probabilidades: Reglas básicas de las probabilidades

Participación de los procesos matemáticos:

Razonar y argumentar

A partir de la información dada de manera explícita se debe realizar el cálculo de las probabilidades solicitadas utilizando propiedades y reglas conocidas; además, se debe verificar la veracidad de una proposición efectuando razonamientos directos. Indicadores RA1.1, RA1.2, RA1.4

Plantear y resolver problemas

Se debe aplicar procedimientos familiares para determinar las probabilidades solicitadas. Indicadores PRP1.1, PRP1.2

Conectar

Este proceso no está presente.

Comunicar

Se debe identificar e interpretar en el enunciado la información necesaria para determinar la probabilidad de cada evento. Indicadores COM1.1, COM1.2

Representar

Se deben identificar los datos presentes en una única representación (información sobre los datos). Indicador R1.1

Resumen de estructura de intervención de los procesos matemáticos:

RA1.1, RA1.2, RA1.4, PRP1.1, PRP1.2, COM1.1, COM1.2, R1.1

Nivel de complejidad: Reproducción (NC1)

Otros elementos curriculares:

1. Existe correspondencia con la habilidad específica pero no con la general, debido a que el contexto planteado hace referencia a información estadística, la misma no se utiliza en la resolución de un problema o la interpretación de los resultados para la comprensión de una situación aleatoria.
2. Hay cierta correspondencia con el enfoque de resolución de problemas y con el área matemática. Se deben aplicar las propiedades básicas de la probabilidad, sin embargo, no existe un para qué después de realizar dicho cálculo.
3. No hay contextualización activa. El cálculo de la probabilidad solicitada no tiene un objetivo claro dentro del contexto que justifique la utilidad del mismo.

Ítem 14

Considere la siguiente situación para responder los ítems 13 y 14:

Se tiene un dado de seis caras, cada una de ellas con un número diferente del 1 al 6 y otro dado de ocho caras, cada una de ellas con un número diferente del 1 al 8. Al lanzar estos dados, cada cara de cada dado tiene la misma probabilidad de quedar en la parte superior.

Se definen los siguientes eventos:

- Evento A: Obtener en la parte superior un número mayor que 3.
- Evento B: Obtener en la parte superior el número 5.
- Evento C: Obtener en la parte superior un número menor o igual que 7.
- Evento D: Obtener en la parte superior un número par.

Para cada uno de los eventos se puede lanzar el dado de seis caras o el de ocho caras.

- 14) Considere las siguientes proposiciones:
- I. La probabilidad de que ocurra el evento C, es mayor si se lanza el dado de seis caras.
 - II. La probabilidad de que ocurra el evento D, es mayor si se lanza el dado de ocho caras.

De ellas, ¿cuál o cuáles son verdaderas?

- A) Ambas
- B) Ninguna
- C) Solo la I
- D) Solo la II

Solución del ítem 14

Proposición I: Probabilidad del evento C

$$\text{Dado 6 caras} = \frac{6}{6}$$

$$\text{Dado 8 caras} = \frac{6}{8}$$

Por lo tanto, la proposición es verdadera.

Proposición II: Probabilidad del evento D

$$\text{Dado 6 caras} = \frac{3}{6}$$

Dado 8 caras $=\frac{4}{8}$

Por lo tanto, la proposición es Falsa.

Respuesta correcta: opción C

Análisis del ítem 14

Correspondencia entre habilidades generales y específicas

Se identifica la siguiente habilidad general:

- Emplear las propiedades básicas de la probabilidad en situaciones concretas (MEP, 2012, p. 431).

Por los elementos teóricos que se involucran en el ítem, la habilidad específica a la que hace referencia es:

- Aplicar los axiomas y propiedades básicas de probabilidades en la resolución de problemas e interpretar los resultados generados (MEP, 2012, p. 436).

Área incluida y conocimientos:

Probabilidad.

Probabilidades: Reglas básicas de las probabilidades

Participación de los procesos matemáticos:

Razonar y argumentar

A partir de la información dada de manera explícita se debe realizar el cálculo de las probabilidades solicitadas utilizando propiedades y reglas conocidas; Además, se debe verificar la veracidad de una proposición efectuando razonamientos directos. Indicadores RA1.1, RA1.2, RA1.4

Plantear y resolver problemas

Se debe aplicar procedimientos familiares para determinar las probabilidades solicitadas. Indicadores PRP1.1, PRP1.2

Conectar

Este proceso no está presente. No se establecen conexiones entre conocimientos de la misma área (se trabaja únicamente las propiedades de las probabilidades), tampoco existen conexiones entre diferentes áreas o disciplinas.

Comunicar

Se debe identificar e interpretar en el enunciado la información necesaria para determinar la probabilidad de cada evento. Indicadores COM1.1, COM1.2

Representar

Se deben identificar los datos presentes en una única representación (información sobre los datos). Indicador R1.1

Resumen de estructura de intervención de los procesos matemáticos:

RA1.1, RA1.2, RA1.4, PRP1.1, PRP1.2, COM1.1, COM1.2, R1.1

Nivel de complejidad: Reproducción (NC1)

Otros elementos curriculares:

Este ítem es idéntico al anterior, solo se cambian los eventos.

1. Existe correspondencia con la habilidad específica pero no con la general, debido a que el contexto planteado hace referencia a información estadística, la misma no se utiliza en la resolución de un problema o la interpretación de los resultados para la comprensión de una situación aleatoria.
2. Hay cierta correspondencia con el enfoque de resolución de problemas y con el área matemática. Se deben aplicar las propiedades básicas de la probabilidad, sin embargo, no existe un para qué después de realizar dicho cálculo.
3. No hay contextualización activa. El cálculo de la probabilidad solicitada no tiene un objetivo claro dentro del contexto que justifique la utilidad del mismo.

Indicadores de los grados de procesos matemáticos según Ruiz (2017).

Tabla 2. Indicadores de grados del proceso Razonar y argumentar

Grado 1	Grado 2	Grado 3
<p>RA1.1 Identificar la información presente de forma explícita en situaciones matemáticas o de contexto real</p> <p>RA1.2 Desarrollar procedimientos rutinarios siguiendo instrucciones directas.</p> <p>RA1.3 Responder a preguntas donde está presente de forma explícita toda la información necesaria para encontrar la solución (preguntas directas como ¿cuántos? ¿cuánto es?).</p> <p>RA1.4 Efectuar razonamientos directos o realizar interpretaciones que se extraen literalmente de los resultados en la aplicación de un procedimiento.</p> <p>RA1.5 Describir los procesos de cálculo o los resultados cuantitativos obtenidos al resolver un problema en una situación matemática o de contexto real ya estudiada.</p>	<p><i>Si alguno o algunos de los indicadores siguientes en esta columna aparecen (y no hay indicadores de grado 3), se valorará la intervención del proceso con un grado 2:</i></p> <p>RA2.1 Identificar información matemática que no está dada de manera explícita en una situación matemática o de contexto real.</p> <p>RA2.2 Responder a preguntas donde la respuesta no es directa y amerita mayor argumentación (por ejemplo: ¿cómo hallamos? ¿qué tratamiento matemático damos? ¿qué puede o no puede pasar y por qué? ¿qué sabemos? ¿qué queremos obtener?).</p> <p>RA2.3 Brindar las soluciones de las preguntas cuando sea pertinente mediante diferentes representaciones: tablas, gráficos, medidas estadísticas, elementos algebraicos, cifras, etc.</p> <p>RA2.4 Evaluar la validez de una secuencia no compleja de argumentos matemáticos (por ejemplo escrita en un texto o en una exposición).</p> <p>RA2.5 Elaborar argumentos basados en sus propias acciones al resolver problemas similares a los ya estudiados.</p>	<p><i>Si alguno o algunos de los indicadores siguientes en esta columna aparecen, se valorará la intervención del proceso con un grado 3:</i></p> <p>RA3.1 Realizar argumentos matemáticos para resolver problemas o describir situaciones (matemáticas o de contexto real) no estudiados y complejos.</p> <p>RA3.2 Desarrollar argumentos que utilizan integradamente distintos conceptos o métodos matemáticos para resolver un problema.</p> <p>RA3.3 Generalizar los métodos matemáticos utilizados o resultados obtenidos en la resolución de problemas.</p> <p>RA3.4 Realizar razonamientos matemáticos donde se muestra que se comprende la amplitud y los límites de los objetos matemáticos usados y de los procedimientos desarrollados.</p> <p>RA3.5 Formular conceptos novedosos en la resolución de problemas o descripción de una situación (matemática o de contexto real).</p> <p>RA3.6 Realizar razonamientos donde se señalan cuáles son los aspectos esenciales del problema o situación y cómo están relacionados los diferentes objetos matemáticos que participan.</p> <p>RA3.7 Consignar en la resolución de un problema los elementos cruciales de la estrategia seguida.</p> <p>RA3.8 Realizar razonamientos matemáticos en situaciones específicas donde se consignan las diferencias entre definiciones, teoremas, conjeturas, hipótesis o afirmaciones.</p>

Tabla 3. Indicadores de grados del proceso *Plantear y resolver problemas*

Grado 1	Grado 2	Grado 3
PRP1.1 Resolver problemas con datos sencillos y enunciados de manera explícita que sólo admiten una única solución.	<i>Si alguno o algunos de los indicadores siguientes en esta columna aparecen (y no hay indicadores de grado 3), se valorará la intervención del proceso con un grado 2:</i>	<i>Si alguno o algunos de los indicadores siguientes en esta columna aparecen, se valorará la intervención del proceso con un grado 3:</i>
PRP1.2 Resolver problemas que involucren la utilización de algoritmos, fórmulas, procedimientos, propiedades, o convenciones elementales.	PRP2.1 Plantear una estrategia correcta para resolver problemas que no han sido estudiados donde se identifiquen con claridad los procedimientos a utilizar.	PRP3.1 Resolver problemas que no han sido estudiados donde se seleccionen, comparen y evalúen diferentes estrategias.
PRP1.3 Identificar problemas que se pueden plantear a partir de una situación dada matemática o de contexto real dada.	PRP2.2 Resolver problemas que no han sido estudiados a partir de una situación dada (matemática o de contexto real) donde se ejecuten acciones secuenciales descritas con claridad.	PRP3.2 Generalizar los resultados obtenidos en la resolución de problemas.
PRP1.4 Identificar modelos matemáticos que ya han sido estudiados, que se encuentran explícitamente formulados y que permitirían explicar o representar situaciones matemáticas elementales o de contexto real.	PRP2.3 Resolver problemas que impliquen establecer conexiones entre distintas áreas matemáticas, o distintas formas de representación o de comunicación.	PRP3.3 Plantear problemas a partir de una situación matemática o de contexto real que implique diferentes estrategias de solución o que sean de solución abierta.
PRP1.5 Resolver problemas mediante la aplicación de un modelo que ya ha sido estudiado y que se encuentra explícitamente formulado.	PRP2.4 Plantear problemas a partir de una situación dada matemática o de contexto real que implique una estrategia de solución.	PTP3.4 Usar modelos matemáticos que no han sido estudiados, para representar o explicar situaciones (matemáticas o de contextos reales) identificando las limitaciones y los supuestos de los mismos.
	PRP2.5 Identificar y usar modelos matemáticos que ya han sido estudiados, que no están explícitamente formulados y que permitirían explicar o representar situaciones elementales matemáticas o de contexto real.	

Tabla 4. Indicadores de grados del proceso *Conectar*

Grado 1	Grado 2	Grado 3
<p>C1.1 Identificar conexiones entre conceptos o procedimientos matemáticos y una situación de contexto real similar a las ya estudiadas.</p> <p>C1.2 Relacionar conceptos o procedimientos matemáticos distintos dentro de una misma área matemática en la resolución de problemas.</p>	<p><i>Si alguno o algunos de los indicadores siguientes en esta columna aparecen (y no hay indicadores de grado 3), se valorará la intervención del proceso con un grado 2:</i></p> <p>C2.1 Usar la conexión entre conceptos o procedimientos matemáticos y una situación de contexto real para resolver problemas similares a los ya estudiados.</p> <p>C2.2 Relacionar conceptos o procedimientos matemáticos de dos o más áreas matemáticas diferentes en la resolución de problemas.</p>	<p><i>Si alguno o algunos de los indicadores siguientes en esta columna aparecen, se valorará la intervención del proceso con un grado 3:</i></p> <p>C3.1 Usar la conexión entre conceptos o procedimientos matemáticos y una situación de contexto real para resolver problemas no estudiados y relativamente complejos.</p> <p>C3.2 Relacionar conceptos o procedimientos matemáticos de dos o más asignaturas o disciplinas cognoscitivas diferentes en la resolución de un problema.</p>

Tabla 5. Indicadores de grados del proceso Comunicar

Grado 1	Grado 2	Grado 3
COM1.1 Identificar expresiones matemáticas estudiadas en textos dados similares a los estudiados (aportados de manera escrita o verbal).	<i>Si alguno o algunos de los indicadores siguientes en esta columna aparecen (y no hay indicadores de grado 3), se valorará la intervención del proceso con un grado 2:</i> COM2.1 Identificar expresiones matemáticas estudiadas en textos dados no similares a los estudiados (aportados de manera escrita o verbal).	<i>Si alguno o algunos de los indicadores siguientes en esta columna aparecen, se valorará la intervención del proceso con un grado 3:</i>
COM1.2 Interpretar expresiones matemáticas dadas en situaciones similares a las estudiadas para proceder a buscar una estrategia de solución.	COM2.2 Interpretar o seguir una secuencia de razonamientos matemáticos, que usan conceptos o procedimientos matemáticos estudiados (expresados de manera oral o escrita) en la resolución de un problema.	COM3.1 Interpretar o seguir una secuencia de razonamientos matemáticos abstractos no estudiados y complejos.
COM1.3 Reproducir los nombres y las propiedades básicas de objetos matemáticos ya estudiados.	COM2.3 Describir mediante un lenguaje matemáticamente no preciso las acciones, resultados y razonamientos que ha efectuado en la solución de un problema.	COM3.2 Expresar ideas, acciones, argumentos y conclusiones usando lenguaje matemático y precisión matemática.
COM1.4 Comunicar en forma breve mediante representaciones matemáticas (verbales, numéricas, algebraicas, tabulares, estadísticas, gráficas) resultados de procedimientos rutinarios (por aplicación de algoritmos o propiedades, fórmulas, convenciones elementales, o un modelo que ya ha sido estudiado) que se desarrollan en la resolución de un problema ya estudiado.	COM2.4 Comunicar conclusiones mediante lenguaje natural en torno a acciones, razonamientos y resultados que ha desarrollado en la resolución de un problema.	COM3.3 Comunicar sus argumentos en la resolución de un problema o la realización de una prueba, usando relaciones más abstractas entre conceptos, métodos o resultados matemáticos (en especial relaciones lógicas).

Tabla 6. Indicadores de grados del proceso *Representar*

Grado 1	Grado 2	Grado 3
R1.1 Identificar los datos que están presentes de forma explícita en representaciones* ya estudiadas de objetos matemáticos.	<i>Si alguno o algunos de los indicadores siguientes en esta columna aparecen (y no hay indicadores de grado 3), se valorará la intervención del proceso con un grado 2:</i>	<i>Si alguno o algunos de los indicadores siguientes en esta columna aparecen, se valorará la intervención del proceso con un grado 3:</i>
R1.2 Usar solo una representación matemática para resolver o para modelar situaciones matemáticas o de un contexto real que han sido estudiadas.	R2.1 Interpretar y razonar sobre la información codificada en una representación matemática dada. R2.2 Pasar de una representación matemática a otra en la resolución de problemas.	R3.1 Pasar de una representación matemática a dos o más representaciones matemáticas en la resolución de problemas. R3.2 Usar tres o más representaciones matemáticas para aplicar en la resolución de problemas en contextos reales o matemáticos que no han sido estudiados y son complejos.
R1.3 Identificar dos más representaciones de objetos matemáticos en una situación dada.	R2.3 Elaborar una representación matemática para interpretar o modelar una situación matemática o de contexto real no estudiada. R2.4 Usar dos representaciones matemáticas en la resolución de problemas estudiados.	R3.3 Combinar representaciones matemáticas distintas de manera creativa para interpretar y modelar una situación matemática o de contexto real. R3.4 Inventar nuevas formas de representación matemática en la resolución de problemas. R3.5 Evidenciar con claridad que se comprenden las ventajas y desventajas de cada representación en la resolución de problemas.
*En esta tabla las representaciones matemáticas pueden ser visuales, gráficas, numéricas, estadísticas, simbólicas o tabulares. Se acepta que al hablar de dos o más representaciones matemáticas estas pueden ser tanto del mismo tipo de representación (visual, gráfico, numérico, estadístico, simbólico, tabular) como de diferentes.		

14. Distribución de estudiantes por colegio, creencias hacia las Matemáticas y diferencia de la calificación de la I a la II aplicación de la prueba escrita

Cuadro 1. Distribución de estudiantes del Colegio 10 según el grupo de creencias hacia las Matemáticas y la diferencia de la calificación de la I a la II aplicación de la prueba escrita

Estudiante	Creencias		
	Negativas	Ambivalentes	Positivas
1	-1.53		
2	-2.30		
3	3.07		
4		0.00	
5	3.07		
6	.76		
7			-1.54
8			2.30
9			0.00
10	.77		
11	1.53		
12	.77		
13	2.30		
14			2.30
15	.77		
16		1.53	
17		.76	
18	0.00		
19	2.31		
20	2.31		
21			2.31
22		-.77	
Total	13	4	5

Fuente: Elaboración propia a partir de los resultados de la prueba escrita y el cuestionario sociodemográfico.

Cuadro 2. Distribución de estudiantes del Colegio 11 según el grupo de creencias hacia las Matemáticas y la diferencia de la calificación de la I a la II aplicación de la prueba escrita

Estudiante	Creencias		
	Negativas	Ambivalentes	Positivas
1	-1.53		
2	3.84		
3			1.53
4			2.30
5		.76	
6			2.30
7		3.84	
8	.76		
9	2.30		
10		-1.53	
11	.77		
12		3.84	
13		-.76	
14	2.30		
15	3.07		
16	-.77		
17	1.53		
18	3.07		
Total	10	5	3

Fuente: Elaboración propia a partir de los resultados de la prueba escrita y el cuestionario sociodemográfico.